

Guia 3 Dinámica No Lineal - Flujos en 2D y espacio de fases- Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2021

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios. El resto son optativos, pero recomendados.

- (*) Clasificación de sistemas lineales Considere el sistema $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.
 - Escriba el sistema en forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Encuentre el polinomio característico y los autovalores.
 - Encuentre la solución general del sistema.
 - Clasifique el punto fijo en el origen.
 - Resuelva el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.
- Considere el sistema $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.
 - Realice un diagrama del campo vector.
 - Muestre que las trayectorias del sistema son hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = C$. Hint: Muestre que $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$ e integre esta ecuación.
 - El origen es un saddle. Encuentre ecuaciones para sus variedades estables e inestables.
 - El sistema se puede desacoplar de la siguiente manera. Realice un cambio de variables $u = x + y, v = x - y$, y reescriba el sistema en términos de u, v . Resuelva para $u(t)$ y $v(t)$ dada una condición inicial (u_0, v_0) .
 - ¿Cómo son las ecuaciones para las variedades estable e inestable en términos de u y v ?
 - Finalmente encuentre la solución general para $x(t)$ y $y(t)$, dada una condición inicial (x_0, y_0) .
- Considere el sistema $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$.
 - Encuentre la matriz A y muestre que tiene autovalores $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, con autovectores $\mathbf{v}_1 = (i, 1), \mathbf{v}_2 = (-i, 1)$.
 - La solución general es $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$. Reescriba esta expresión usando funciones reales (senos y cosenos).
- Dado el sistema $\dot{x} = Ax$, con $A \in R^{2 \times 2} = cte$ y $x \in R^2$ se pueden caracterizar todas las soluciones de este sistema a partir de la traza y el determinante de A . Realice un diagrama en el plano (τ, Δ) mostrando el comportamiento que se obtiene para las diferentes zonas.
- Dibuje el retrato de fase y clasifique los puntos fijos de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales muéstrelos en el gráfico.
 - $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x - 3y$
 - $\dot{x} = 5x + 10y, \quad \dot{y} = -x - y$
 - $\dot{x} = 3x - 4y, \quad \dot{y} = x - y$
 - (*) $\dot{x} = 5x + 2y, \quad \dot{y} = -17x - 5y$
- (*) Considere la ecuación de un circuito RLC, $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, donde $LC > 0$ y $R \geq 0$.

- (a) Reescriba el problema como un sistema de dos dimensiones.
- (b) Muestre que el origen es asintóticamente estable si $R > 0$ y neutralmente estable si $R = 0$.
- (c) Clasifique el punto fijo en el origen según el valor de $R^2C - 4L$. Dibuje un retrato de fases para los tres casos.

7. Retratos de fases

Para los siguientes sistemas encuentre los puntos fijos. Dibuje las nulclinas, el campo vector y un posible retrato de fases.

- (a) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 1 - e^x$
- (b) (*) $\dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = -y$
- (c) (*) $\dot{x} = x(x - y), \quad \dot{y} = y(2x - y)$
- (d) $\dot{x} = x(2 - x - y), \quad \dot{y} = x - y$
- (e) (*) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x^2 - 4$
- (f) (*) $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = x - x^3$
- (g) (oscilador van del Pol) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2)$
- (h) (punto fijo en un dipolo) $\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$.

8. (*) Aproximación en series de la variedad estable

El sistema $\dot{x} = x + e^{-y}, \dot{y} = -y$ tiene un punto fijo y un saddle en $(-1, 0)$. La variedad inestable es el eje x , pero su variedad estable es una curva más difícil de encontrar.

- (a) Sea (x, y) un punto en la variedad estable y asuma que (x, y) está cerca de $(-1, 0)$. Introduzca una nueva variable $u = x + 1$ y reescriba la variedad estable como $y = a_1u + a_2u^2 + O(u^3)$. Para determinar los coeficientes, derive las dos expresiones para dy/dx e igualelas término a término.
- (b) Compruebe utilizando una computadora que su resultado analítico produce una curva con la misma forma que la variedad numérica.

9. Considere el sistema $\dot{x} = y^3 - 4x, \dot{y} = y^3 - y - 3x$.

- (a) Encuentre todos los puntos fijos.
- (b) Muestre que la línea $x = y$ es invariante (toda trayectoria que comienza en la línea se queda allí).
- (c) Muestre que $|x(t) - y(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todas las trayectorias. Hint: escriba una ecuación diferencial para $x - y$
- (d) Dibuje un retrato de fases.
- (e) Con la computadora realice un retrato de fases preciso en el dominio $-20 \leq x, y \leq 20$. Utilice un paso de integración suficientemente pequeño para no tener inestabilidades numéricas. Fíjense que las trayectorias parecen acercarse a una curva en $t \rightarrow -\infty$. ¿Puede explicar esto intuitivamente y tal vez encontrar una curva aproximada?

10. (*) Sensibilidad a términos no lineales Considere el sistema en coordenadas polares $\dot{r} = -r, \dot{\theta} = 1/\ln r$.

- (a) Encuentre $r(t)$ y $\theta(t)$ explícitamente.
- (b) Muestre que $r(t) \rightarrow 0$ y $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ a medida que $t \rightarrow \infty$, por lo que el origen es un foco atractor del sistema no lineal.
- (c) Reescriba el sistema en coordenadas (x, y) .
- (d) Muestre que el sistema linealizado en el origen es estable pero no foco.

11. En mecánica clásica es habitual estudiar las pequeñas oscilaciones de un sistema alrededor de sus equilibrios. Considerando el sistema $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ y suponiendo que $V(q)$ tiene un mínimo en q_0

(a) Muestre que $(q_0, 0)$ es un punto fijo del sistema dado por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q} &= -\dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q}\end{aligned}$$

(b) ¿Es este punto fijo estable? Discuta la estabilidad de esta solución

(c) ¿Qué ocurre si se perturba esa solución? Muestre que la solución perturbada queda en un entorno del punto $(q_0, 0)$.