Ejemplos físicos de las primeras bifurcaciones
Miércoles 29 de abril 2020

1. **Un laser de estado solido** esta constituido por una matriz material de estado solido, entre dos espejos parcialmente reflectantes. En esa matriz de estado solido existe un conjunto de átomos susceptibles de ser excitados por una fuente, de modo que pasen del estado fundamental a un modo excitado. Del decaimiento espontaneo de esos estados al estado fundamental no emerge el efecto laser. Sin embargo, cuando la fuente es suficientemente alta, estos átomos comienzan a emitir fotones en forma coherente, y se produce el fenómeno que conocemos como **amplificación de luz por emisión estimulada.** El modelo se escribe traduciendo el titulo a ecuaciones:

Sea $n(t)$ el numero de fotones en el campo laser. La tasa de variación de esta variable se puede escribir como:

$$\frac{dn}{dt} = ganacia - perdida,$$

Donde la ganancia proviene del efecto de emisión estimulada, esto es, cada vez que se produzca un encuentro (los cuales ocurrirán aleatoriamente) entre los fotones que se hayan emitido n, y el numero de los átomos activos listos para emitir un fotón N. Como depende de los encuentros posibles, podemos escribir:

$$ganacia = G\, n\, N,$$

Con G un factor de escala. Las pérdidas, por otro lado, podemos escribirlas como:

$$perdida = -kn, \quad con\ k = \frac{1}{\tau},$$

Con τ el tiempo de vida de un fotón en la cavidad, antes de perderse al exterior por los espejos parcialmente reflectantes.

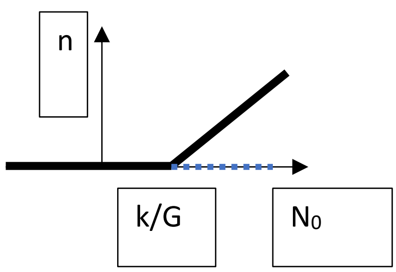
La gracia del asunto es que cuando se emite un fotón, un átomo excitado deja de serlo, de modo que podemos escribir a N:

$$N(t) = N_0 - \alpha\, n(t),$$

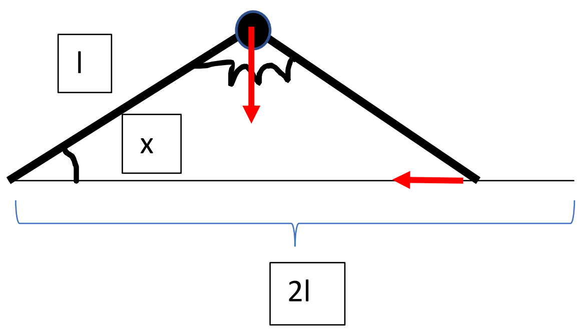
De modo que el modelo final nos queda:

$$\boxed{\frac{dn}{dt} = Gn(N_0 - \alpha n) - kn = (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2.}$$

Pensando al bombeo N_0 como parámetro de control, tenemos



2. **El modelo mas sencillo de "buckling".** Sea el siguiente par de barras rígidas, de masa despreciable, conectadas por un articulador de masa m, conectadas por un resorte. Una de las barras esta fija, y la otra puede desplazarse en una dirección, como se muestra en la figura. Al extremo no sujeto, se le aplica una fuerza constante F_c. Describir las soluciones estacionarias del problema.



La maravilla de la formulación Lagrangiana, es que no hay que aprenderse las ecuaciones de un problema para cada sistema de coordenadas habido y por haber (como sucedería en la formulación Newtoniana). Escribimos el Lagrangiano $L \equiv T - U$, en coordenadas generalizadas, y las ecuaciones son siempre las mismas, las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

(La única salvedad es que la energía cinetica debe escribirse en un sistema de coordenadas inercial, aunque luego uno la exprese en las coordenadas que mas le gusten, claro.) En este caso, para T tenemos:

$$T = \frac{1}{2} m \, (l\dot{x})^2,$$

Y para U, tenemos tres componentes:

$$U_g = mg \; l sinx = mgl(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots)$$

$$U_k = \frac{1}{2} k \, x^2$$

$$U_c = -1. F_c(2l - 2l \; cosx) = 2lF_c(cosx - 1)$$

De modo que las ecuaciones de Euler quedan, para este problema;

$$ml^2 \frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\frac{\partial}{\partial x}(U_g + U_k + U_c)$$

Que escrito como sistema de ecuaciones 1d, queda:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{ml^2}\left(mg\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + kx - 2lF_c\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right)$$

Los puntos estacionarios, se calculan entonces como $v = 0$, y

$$mg\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + kx - 2lF_c\left(x-\frac{x^3}{6}\right) = 0.$$

Re escribiéndola, tenemos:

$$\boxed{\underbrace{(k-2lF_c)x + \left(\frac{x^3}{6}\right)}_{\text{Términos de pitchfork.}} + \underbrace{mg - mg\frac{x^2}{2}}_{\text{Términos que rompen la simetria}} = 0.}$$

3. **Ejemplo preparatorio para derivar las ecuaciones de Lorenz.** Este no corresponde a un problema físico que nos vaya a interesar, pero esta pensado para aprender un par de trucos importantes para derivas las ecuaciones de Lorenz, que son un sistema muy interesante (por varias razones que veremos en el ejemplo 4).

Sea la siguiente ecuación diferencial a derivadas parciales:

$$\partial_t \psi = r\psi + \underbrace{\psi \partial_x \psi}_{\text{NL}} + \partial_{xx}\psi$$

Tal que

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Podemos proponer el desarrollo de un campo solución del problema como:

$$\psi = \sum A_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$$

(¡notemos que los términos de la base que elegimos sirven para generar las soluciones del problema lineal!)

Ahora bien, calculemos cada operador sobre el campo elegido:

$$\partial_t \psi = \sum \frac{dA_m(t)}{dt} \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$$

$$\partial_{xx}\psi = \sum -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 A_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$$

Y el que hace lio es el termino advectivo:

$$\psi \partial_x \psi = \sum_m A_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \sum_n \frac{n\pi}{l} A_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\sum_n \sum_m \frac{n\pi}{l} A_n(t) A_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Ahora bien, si usamos que

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

O sea, que:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)),$$

entonces podemos escribir al termino no lineal como funciones solo de los senos, y no de los productos de senos y cosenos!

$$\psi \partial_x \psi = \sum_n \sum_m \frac{n\pi}{2l} A_n(t) A_m(t) \; (\sin\left(\frac{(m+n)\pi}{l}x\right) + sin\left(\frac{(m-n)\pi}{l}x\right))$$

$$= \underbrace{\sum_n \sum_m \frac{n\pi}{2l} A_n(t) A_m(t) \; \sin\left(\frac{(m+n)\pi}{l}x\right)}_{\text{S1}} + \underbrace{\sum_n \sum_m \frac{n\pi}{2l} A_n(t) A_m(t)\, sin\left(\frac{(m-n)\pi}{l}x\right)}_{\text{S2}}$$

Así que si me pregunto por que términos de estas series van como "sin x", de la primera de estas sumas no tengo contribuciones (los números mas bajos son m=1 y n=1, pero de la segunda serie tengo infinitos términos: todos aquellos en los que m y n difieran en 1!

Ahora estoy en condiciones de meter mi propuesta:

$$\psi = \sum A_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$$

En las ecuaciones originales. Tendre algo como:

$$\partial_t \psi = \sum \frac{dA_m(t)}{dt} \; \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) = r \; \sum A_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) + \cdots$$

Y tendré que igualar el coeficiente de cada termino $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ del lado izquierdo de la ecuación, con el coeficiente de cada termino $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ del lado derecho de la ecuación.
O sea:

$$\frac{dA_m(t)}{dt} = \left(todo\ lo\ que\ acompañe\ a\ \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\ del\ lado\ derecho\ de\ la\ ecuacion\right).$$

Con los términos lineales no tengo problema:

$$\frac{dA_m(t)}{dt} = \underbrace{r\, A_m(t) - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 A_m(t)} + \cdots$$

Lo que aportan a las ecuaciones de amplitud
del modo m, los términos lineales

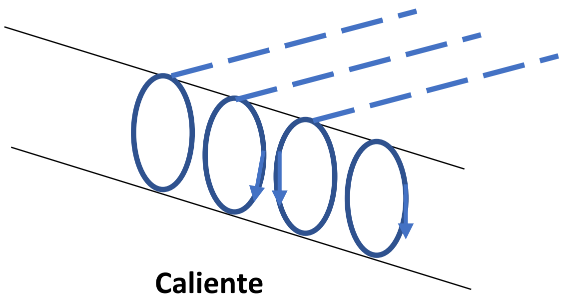
Y lo que aportan los términos que provienen del termino no lineal, serán los términos
De las dos series que derivamos arriba (S1 y S2), tales que la suma o la diferencia de índices de m!

Así, por ejemplo,

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = r\, A_1(t) - (\frac{\pi}{l})^2 A_1(t) + (\frac{2\pi}{2l}\ \ A_2(t)A_3(t) + \cdots)$$

Y así siguiendo. Notemos que en principio, hasta que no tengamos un criterio para cortar estos desarrollos, tenemos que vivir con la idea de que las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales deben expresarse en término de **infinitos modos.**

4. **Las ecuaciones de Lorenz.**



Este fue un modelo muy sencillo para dar cuenta de la convección de Benard, que consistía en someter a una capa fluida a un gradiente térmico. Dos superficies paralelas, infinitas, se mantienen a distintas temperaturas (la de abajo, la mas caliente, a $T + \Delta T$, siendo T la temperatura de la placa superior). Para diferencias de temperatura pequeñas, solo hay conducción de calor (i.e., el fluido no se mueve). Pero si la diferencia de temperaturas supera cierto umbral, el fluido caliente de abajo intenta subir (ya que es menos denso y por lo tanto mas liviano), lo cual implicara que parte del fluido de arriba bajara. Los experimentos mostraban que una primera estructura se desarrollaba, en forma de rollos. Lorenz busco una aproximación para estudiar este problema, de aplicaciones directas a problemas del clima.

Las ecuaciones de las que se parte con las de Navier Stokes, que analizan la dinámica de pequeños elementos de fluido, aplicándole al mismo la conservación del momento, teniendo en cuenta que al elemento de fluido lo describimos termodinámicamente (son 10^23 partículas, no una):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{\nabla}\mathrm{p} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nabla}^{2}\boldsymbol{v})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})T = k\boldsymbol{\nabla}^{2}T$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\rho\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

El ultimo termino de la primera ecuación da cuenta del efecto de la viscosidad dando lugar a una difusión del momento. La segunda ecuación da cuenta de que la variación de la temperatura se debe a la difusión y a la adveccion (transporte de material a cierta temperatura). La ultima ecuación da cuenta de la conservación de la masa. Para atacar al problema, se asume una ecuación de estado vinculando la densidad con la temperatura:

$$\rho = \bar{\rho}\big(1 - \gamma(T - T_0)\big),$$

Solo para el termino gravitacional (el resto de los cálculos usa $\rho = \bar{\rho}$).

Para atacar este problema, lo primero que hace Lorenz (siguiendo a Saltzman) es pensar el problema en términos de la perturbación de la solución conductiva. Esto es:

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T\left(1 - \frac{z}{h}\right) + \theta(x, z, t),$$

E intentar escribir una ecuación para $\theta(x, z, t)$, un campo pequeño, y para la velocidad $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$**,** que como se parte de velocidad nula, son campos pequeños. Si $\rho = \bar{\rho}$, puede usar que la divergencia del campo de velocidades es nula, y escribir a las velocidades como derivadas de un potencial:

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$v_z = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Y reemplazando en las ecuaciones de Navier Stokes quedan estas dos ecuaciones:

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} + \nu\nabla^2(\nabla^2\psi) + g\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta,$$

Donde

$$\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Bien, ahora uno quiere representar la aparición, y eventualmente modelar que ocurre con, estas estructuras, estos rollos convectivos. Entonces propone esta solución:

$$\psi = \frac{\kappa(1 + a^2)}{a}X(t)\sin\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right)$$

Donde la parte en z da cuenta de que las perturbaciones de velocidad en z mueren en los dos bordes, mientras que la componente de la velocidad en x tienen su máximo y mínimo desfasadas de donde están máximos y mínimos de la componente en z, como corresponde a rollos. También se cumple que la velocidad en x en las capas superior e inferior tienen signos contrarios, a un mismo x, como corresponde a un rollo. $X(t)$ es una amplitud del modo, como en el ejercicio anterior, y lo que queremos es encontrar su ecuación. Por supuesto, esto implicara alguna estructura para la perturbación de temperatura. Notemos que el flujo sube por las zonas calientes, de modo que para tener consistencia con el rollo en el campo de velocidades, deberíamos tener al menos:

$$\theta \sim Y(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right),$$

De modo que

$$v_z = \frac{\partial\psi}{\partial x} \sim \theta.$$

Ahora bien, resulta que debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones, si tenemos estos modos para el potencial y para la perturbación de temperatura, también deberemos incluir un termino en esta ultima como sigue:

$$\theta \sim Y(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right) - \frac{1}{2}Z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right).$$

Veamos por que. Para realizar esta cuenta, vamos a usar la misma filosofía que en el ejemplo-ejercicio anterior. Vamos a tomar las propuestas de estos modos, y vamos a reemplazar en las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Luego vamos a agrupar los coeficientes de los diferentes modos espaciales, y escribiremos:

$$\sum coeficientes_i\,(modos\ espaciales_i) = 0$$

Y de que

$$coeficientes_i = 0$$

Obtendremos nuestras ecuaciones, pues al escribir los coeficientes tendremos:

$$\left(\frac{dX}{dt} - f_1(X,Y,Z)\right)(modo\ espacial\ 1) +$$

$$\left(\frac{dY}{dt} - f_2(X,Y,Z)\right)(modo\ espacial\ 2) +$$

$$\left(\frac{dZ}{dt} - f_3(X,Y,Z)\right)(modo\ espacial\ 3) = 0$$

Procedamos entonces a meter nuestras propuestas de modos:

$$\theta \sim Y(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right) - \frac{1}{2}Z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{k}z\right),$$

$$\psi \sim X(t)\sin\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\,(\frac{\pi}{h}\,z)$$

En las ecuaciones

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} + \nu\nabla^2(\nabla^2\psi) + g\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} + \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta,$$

Yo voy a empezar por esta ultima, porque es mas fácil. Los términos lineales son súper fáciles. Por ejemplo:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \sim \frac{dY(t)}{dt}\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right) - \frac{1}{2}\frac{dZ(t)}{dt}\sin\left(\frac{2\pi}{k}z\right),$$

O sea, simplemente derivar las amplitudes, que son lo único que depende del tiempo. El resto son los modos espaciales. Similar de fácil es el termino lineal con la derivada espacial del potencial,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \sim X(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\,(\frac{\pi}{h}\,z)$$

O el del laplaciano,

$$\nabla^2\theta \sim \#_1\,Y(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right) - \#_2 Z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right).$$

Donde se pone interesante es cuando uno calcula los términos no lineales. Al hacer el producto $\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)}$, aparecerá un termino:

$$\sim XY\,sin(\frac{\pi}{h}\,z)\cos\,(\frac{\pi}{h}\,z) \sim XY\,sin(\frac{2\pi}{h}\,z)$$

Y otro:

$$\sim XZ\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)\sim XZ\underbrace{\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)+}_{}$$

$$+\#\,XZ\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{h}z\right)$$

Recordando que

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}\sim\frac{dY(t)}{dt}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi a}{h}\,x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}\,z\right)}_{}-\frac{1}{2}\frac{dZ(t)}{dt}\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{k}z\right)}_{},$$

Vemos que habrá un termino de XY en la ecuación de $\frac{dZ(t)}{dt}$.

Y mirando lo subrayado en verde, que XZ contribuirá en la ecuación de $\frac{dY(t)}{dt}$.

Haciendo la cuenta completa:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dX}{dt}&=\sigma(Y-X)\\ \frac{dY}{dt}&=rX-Y-XZ\\ \frac{dZ}{dt}&=XY-bZ\end{aligned}}$$

Estas ecuaciones son invariantes ante el cambio $X\to -X, Y\to -Y, Z\to Z$. El origen es un punto estacionario siempre, y luego, para $r>1$, un par de puntos fijos simétricos conjugados.

Ejercicio conceptual: que bifurcación dara lugar a esos puntos fijos?
Ejercicio algebraico: escribir la bifurcación cerca de (0,0,0) y para r~1.
Ejercicio numérico: Integrar para r=10.