Guía 2 Dinámica no lineal - Bifurcaciones en la línea
Cátedra G. Mindlin

1er Cuatrimestre 2022

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios. El resto son optativos, pero recomendados.

1. **Bifurcación saddle-node**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación saddle-node ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.

   (a) (*) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$

   (b) (*) $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$

   (c) $\dot{x} = r + x/2 - x/(1 + x)$

   Cuando se discute la forma normal de la saddle-node se asume que $a = \frac{\partial f}{\partial r}|_{x^* r_c} \neq 0$. Para ver lo que sucede si no se cumple dicha condición haga un dibujo del campo vector del los siguientes ejemplos:

   (a) $\dot{x} = r^2 - x^2$

   (b) $\dot{x} = r^2 + x^2$

2. **Bifurcación transcrítica**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación transcrítica ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.

   (a) (*) $\dot{x} = rx + x^2$

   (b) (*) $\dot{x} = rx - \ln(1 + x)$

3. **Bifurcación pitchfork**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación pitchfork ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.

   (a) (*) $\dot{x} = rx + 4x^3$

   (b) (*) $\dot{x} = rx - \sinh x$

4. Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga qué tipo es (incluyendo si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.

   (a) (*) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$

   (b) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$

   (c) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$

   (d) (*) $\dot{x} = x + \tanh(rx)$

5. (*) **Pitchfork imperfecta** Considere el sistema $\dot{x} = rx + ax^2 - x^3$, donde $-\infty < a < \infty$. Para $a = 0$ tenemos la forma normal de pitchfork supercrítica. Ahora queremos ver el efecto de perturbar el sistema con un término cuadrático.

   (a) ¿Qué simetría se rompe para $a \neq 0$?

(b) Para cada a realice un diagrama de bifurcaciones x^* vs r. A medida que a varía ocurren cambios cualitativos. Encuentre todos los cambios cualitativos que se pueden obtener cambiando a.

(c) Resuma los resultados anteriores dibujando en un diagrama (r, a) los distintos retratos de fases. ¿Qué bifurcaciones ocurren en las interfases de estas regiones? Identifíquelas.

6. (*) **Switch bioquímico** Las bandas de las cebras y los patrones de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el surgimiento de dichos patrones es un problema abierto en la biología.

   Como uno de los ingredientes necesarios para el surgimiento de dichos patrones, Lewis (1979) consideró un ejemplo sencillo de switch bioquímico, donde un gen G se activa por una señal bioquímica S. Por ejemplo, el gen está normalmente desactivado, pero se puede 'prender' para producir un pigmento, u otro producto de los genes cuando la concentración de S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2} \tag{1}$$

   donde $k_j > 0$ son constantes de reacción. La producción de g es estimulada por s_0 al ritmo k_1, y por una retroalimentación *auto catalítica* o positiva (los términos no lineales). Hay también un término de degradación controlado por k_2.

   (a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2} \tag{2}$$

   donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

   (b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

   (c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se 'prende'): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se *apaga* nuevamente?

   (d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

7. Para los siguientes sistemas dibuje los retratos de fase como función del parámetro de control μ. Clasifique las bifurcaciones que ocurren a medida que μ varía y encuentre todas los valores μ de las bifurcaciones.

   (a) (*) $\dot{\theta} = \mu \sin\theta - \sin 2\theta$

   (b) (*) $\dot{\theta} = \mu + \cos\theta + \cos 2\theta$

   (c) $\dot{\theta} = \frac{\sin\theta}{\mu + \cos\theta}$

8. (*) Suponga que agrega un resorte de torsión al péndulo sobre-amortiguado, modificando la ecuación de movimiento a

$$b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma - k\theta. \tag{3}$$

   (a) ¿Esta ecuación da un campo vector bien definido?

   (b) Adimensionalice la ecuación.

   (c) ¿Qué hace el péndulo en asintóticamente en el tiempo?

   (d) Muestre que ocurren muchas bifurcaciones a medida que k varía de 0 a ∞. ¿Qué tipo de bifurcaciones son?

9. (*) **Singular perturbation** Considere la siguiente ecuación lineal

$$\epsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{4}$$

   sujeto a la condición $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

(a) Resuelva analíticamente el problema para todo $\epsilon > 0$.

(b) Suponga que $\epsilon \ll 1$. Muestre que hay dos escalas temporales muy separadas en el problema, y estímelas en términos de ϵ.

(c) Grafique la solución $x(t)$ para $\epsilon \ll 1$, e indique las dos escalas de tiempo en el gráfico.

(d) ¿Qué concluye acerca de la validez de reemplazar $\epsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ con su límite singular $\dot{x} + x = 0$?

(e) De dos análogos físicos de este problema (uno de circuitos eléctricos y otro mecánico). En cada caso encuentre el parámetro adimensional ϵ y explique el significado físico del límite $\epsilon \ll 1$.

10. (*) **Reducción de parámetros en la pitchfork subcrítica** El sistema de primer orden $\dot{u} = au + bu^3 - cu^5$ donde $b, c > 0$ son parámetros tiene una bifurcación pitchfork subcrítica en $a = 0$. Muestre que la ecuación puede reducirse a

$$\frac{dx}{d\tau} = rx + x^3 - x^5 \tag{5}$$

donde $x = u/U$, $\tau = t/T$ y U, T y r tienen que ser determinados a partir de a, b, y c.

11. (*) Sistema excitable. Suponga que estimula una neurona inyectándole un pulso de corriente. Si el estímulo es pequeño, el potencial de membrana aumenta un poco y luego relaja a su estado de reposo. Sin embargo si el estímulo supera un umbral la neurona 'dispara' y produce un potencial de membrana grande y luego vuelve al potencial de reposo. Sorprendentemente el tamaño del pico del potencial no depende del estímulo, y cualquier cosa por encima del umbral da lo mismo. Estos sistemas se conocen como *excitables*: i) tiene un atractor único, y ii) para un estímulo suficientemente grande, el sistema realiza una excursión en el espacio de fases grande antes de volver a su estado de reposo.

Analice el sistema excitable más sencillo $\dot{\theta} = \mu + \sin\theta$ para μ levemente menor a 1.

(a) Muestre que este sistema satisface las dos condiciones de sistema excitable.

(b) Sea el potencial de membrana $V(t) = \cos\theta(t)$. Haga un gráfico de $V(t)$ para varias condiciones iniciales.