Guia 3 Dinámica no lineal - Flujos en 2D y espacio de fases- Cátedra G. Mindlin

1er Cuatrimestre 2022

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios. El resto son optativos, pero recomendados.

1. (*) Clasificación de sistemas lineales Considere el sistema $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.
   (a) Escriba el sistema en forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Muestre que el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ y encuentre los autovalores.
   (b) Encuentre la solución general del sistema.
   (c) Clasifique el punto fijo en el origen.
   (d) Resuelva el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

2. Considere el sistema $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.
   (a) Realice un diagrama del campo vector.
   (b) Muestre que las trayectorias del sistema son hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = C$. Hint: Muestre que $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$ e integre esta ecuación.
   (c) El origen es un saddle. Encuentre ecuaciones para sus variedades estables e inestables.
   (d) El sistema se puede desacoplar de la siguiente manera. Realice un cambio de variables $u = x + y, v = x - y$, y reescriba el sistema en términos de u, v. Resuelva para $u(t)$ y $v(t)$ dada una condición inicial (u_0, v_0).
   (e) Como son las ecuaciones para la variedad estable e inestable en términos de u y v?
   (f) Finalmente encuentre la solución general para $x(t)$ y $y(t)$, dada una condición inicial (x_0, y_0).

3. Considere el sistema $\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y$.
   (a) Encuentre la matriz A y muestre que tiene autovalores $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, con autovectores $\mathbf{v_1} = (i, 1)$, $\mathbf{v_2} = (-i, 1)$.
   (b) La solución general es $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$. Reescriba esta expresión usando funciones valuada en los reales (senos y cosenos).

4. Dado el sistema $\dot{x} = Ax$, con $A \,\epsilon\, R^{2x2} = cte$ y $x \,\epsilon\, R^2$ se pueden caracterizar todas las soluciones de este sistema a partir de la traza y el determinante de A. Realice un diagrama en el plan $(trA, DetA)$ mostrando el comportamiento que se obtiene para las diferentes zonas

5. Dibuje el retrato de fase y clasifique los puntos fijos de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales muéstrelos en el gráfico.
   (a) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -2x - 3y$
   (b) $\dot{x} = 5x + 10y, \qquad \dot{y} = -x - y$
   (c) $\dot{x} = 3x - 4y, \qquad \dot{y} = x - y$
   (d) (*) $\dot{x} = 5x + 2y, \qquad \dot{y} = -17x - 5y$

6. (*) Considere la ecuación de un circuito RLC, $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, donde $LC > 0$ y $R \geq 0$.

(a) Reescriba el sistema como de dos dimensiones.

(b) Muestre que el origen es asintóticamente estable si $R > 0$ y neutralmente estable si $R = 0$.

(c) Clasifique el punto fijo en el origen según el valor de $R^2C - 4L$. Dibuje un retrato de fases para los tres casos.

7. **Retratos de fases**

Para los siguientes sistemas encuentre los puntos fijos. Dibuje las nulclinas, el campo vector y un posible retrato de fases.

(a) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = 1 - e^x$

(b) (*) $\dot{x} = x - x^3, \qquad \dot{y} = -y$

(c) (*) $\dot{x} = x(x - y), \qquad \dot{y} = y(2x - y)$

(d) $\dot{x} = x(2 - x - y), \qquad \dot{y} = x - y$

(e) (*) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = x^2 - 4$

(f) (*) $\dot{x} = \sin y, \qquad \dot{y} = x - x^3$

(g) (oscilador van del Pol) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + y(1 - x^2)$

(h) (punto fijo en un dipolo) $\dot{x} = 2xy, \qquad \dot{y} = y^2 - x^2$.

8. **(*) Aproximación en series de la variedad estable**

El sistema $\dot{x} = x + e^{-y}, \dot{y} = -y$ tiene un punto fijo y un saddle en (-1,0). La variedad inestable es el eje x, pero su variedad estable es una curva que es más difícil de encontrar.

(a) Sea (x, y) un punto en la variedad estable y asuma que (x, y) está cerca de $(-1, 0)$. Introduzca una nueva variable $u = x + 1$ y reescriba la variedad estable como $y = a_1u + a_2u^2 + O(u^3)$. Para determinar los coeficientes, derive las dos expresiones para dy/dx e iguálelas término a término.

(b) Compruebe utilizando una computadora que su resultado analítico produce una curva con la misma forma que la variedad numérica.

9. Considere el sistema $\dot{x} = y^3 - 4x, \dot{y} = y^3 - y - 3x$.

(a) Encuentre todos los puntos fijos.

(b) Muestre que la linea $x = y$ es invariante (toda trayectoria que comienza en la linea se queda allí.)

(c) Muestre que $|x(t) - y(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$ para todas las trayectorias. Hint: escriba una ecuación diferencial para $x - y$

(d) Dibuje un retrato de fases.

(e) Con la computadora realice un retrato de fases preciso en el dominio $-20 \leq x, y \leq 20$. Utilice un paso de integración suficientemente pequeño para no tener inestabilidades numéricas. Fíjense que las trayectorias parecen acercarse a una curva en $t \to -\infty$. ¿Puede explicar esto intuitivamente y tal vez encontrar una curva aproximada?

10. (*) **Sensibilidad a términos no lineales**

Considere el sistema en coordenadas polares $\dot{r} = -r, \dot{\theta} = 1/\ln r$.

(a) Encuentre $r(t)$ y $\theta(t)$ explícitamente.

(b) Muestre que $r(t) \to 0$ y $|\theta(t)| \to \infty$ a medida que $t \to \infty$, entonces el origen es un foco atractor del sistema nolineal.

(c) Reescriba el sistema en coordenadas (x, y).

(d) Muestre que el sistema linearizado en el origen es estable pero no foco.

11. En mecánica clásica es habitual estudiar las pequeñas oscilaciones de un sistema alrededor de sus equilibrios. Considerando el sistema $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ y suponiendo que $V(q)$ tiene un mínimo en q_0

(a) Muestre que $(q_0, 0)$ es un punto fijo del sistema dado por las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}.$$

(b) ¿Es este punto fijo estable? Discuta la estabilidad de esta solución.

(c) ¿Qué ocurre si se perturba esa solución? Muestre que la solución perturbada queda en un entorno del punto $(q_0, 0)$.