# Guía 4 Dinámica no lineal - Bifurcaciones en 2D
# Cátedra G. Mindlin

1er Cuatrimestre 2022

**Nota:** los problemas que figuran con (*) son obligatorios, el resto son optativos, pero recomendados.

1. Para cada uno de los siguientes sistemas encuentre los autovalores como función de $\mu$. Dibuje el campo vector para $\mu = 0$ y $\mu \neq 0$. ¿Cuánto valen los autovalores en la bifurcación?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (*)\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

2. (*) Encuentre y clasifique todas las bifurcaciones del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax \\ \dot{y} &= -by + x/(1+x) \end{aligned}$$

3. **(*) Gusanos vs. Bosque.** Ludwig propuso un modelo para los efectos de una población de gusanos en un bosque de abetos. Se asume que la condición del bosque está caracterizada por $S(t)$ (tamañno promedio de los árboles) y $E(t)$, reserva de energía (una medida de la salud del bosque). En presencia de una población constante de gusanos $B$, la dinámica del bosque está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S}\frac{K_E}{E}\right) \\ \dot{E} &= r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - P\frac{B}{S} \end{aligned}$$

donde $r_S, r_E, K_S, K_E, P > 0$.

   (a) Interprete los términos en el modelo biológico.

   (b) Adimensionalice el sistema.

   (c) Dibuje las nulclinas. Mostrar que si $B$ es chico hay 2 puntos fijos, y ninguno si $B$ es grande. ¿Qué tipo de bifurcación ocurre para el valor crítico $B_c$?

   (d) Dibuje el retrato de fases para $B$ chico y $B$ grande.

4. Considere el siguiente problema de dinámica de poblaciones, donde ambas tienen una capacidad de carga finita,

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= r_2 N_2 (1 - N_2/K_2) - b_2 N_1 N_2 \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Adimensionalice el modelo. ¿Cuántos grupos adimensionales son necesarios?

   (b) Muestre que hay 4 retratos de fases cuantitativamente distintos, en términos del comportamiento asintótico del sistema.

(c) Encuentre las condiciones por las cuales las dos poblaciones pueden coexistir establemente. Explique el significado biológico de la condición.

Hint: la capacidad de carga refleja la competencia dentro de la misma especie, donde $b$ refleja la competencia entre especies.

5. **Modelo epidemiológico.** En un trabajo pionero Kermack y McKendrick (1927) propusieron un modelo sencillo para la evolución de las epidemias. Suponga que la población puede dividirse en 3 tipos: $x(t)$ =número de individuos sanos; $y(t)$ =número de individuos infectados; $z(t)$ =número de individuos muertos. En una versión más optimista, conocida como SIR, la tercera población se identifica con individuos recuperados. El modelo es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly \end{aligned} \tag{2}$$

donde $k$ y $l$ son constantes positivas. El modelo se basa en

- Los individuos sanos se enferman a un ritmo proporcional al producto de $x$ e $y$,
- Los enfermos mueren a una tasa $l$.

Este sistema puede analizarse de diversas formas (ver p. ej ejercicio 3.7.6 del Strogatz para un método de reducción a 1D). La idea es analizar este problema en el espacio de fases 2D, notando que puede omitirse la evolución de la variable $z$.

(a) Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.

(b) Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vector.

(c) Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.

(d) Haga un retrato de fases. ¿Qué pasa en $t \to \infty$?

(e) Sea $(x_0, y_0)$ una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando $y(t)$ aumenta inicialmente. ¿Bajo que condiciones esto ocurre?

6. Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde $a$ y $b$ son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

(b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a, b)$. Recuerde que $T(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a,b)}$, donde $\theta$ es el ángulo en polares.

(c) Pruebe que para $b = 0$ hay solo una órbita periódica.

7. (*) Estudie el sistema $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos\theta$, $\dot{\theta} = 1$.

(a) Por medio de simulaciones numéricas, vea si existe un un parámetro $\mu > 0$ crítico donde la órbita periódica desaparece.

(b) Usando el teorema de Poincaré-Bendixon muestre que hay una órbita periódica en el ánulo $\sqrt{1-\mu} < r < \sqrt{1+\mu}$ para todo $\mu < 1$.

(c) Para aproximar la forma de $R(\theta)$ de la órbita para $\mu \ll 1$, asuma una serie de potencias de la forma $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$. Sustituya esta solución en la ecuación diferencial $dr/d\theta$ y aproxime tirando los términos de orden $O(\mu^2)$. Obtenga entonces una ecuación diferencial para $r_1(\theta)$, y resuélvala. Esta aproximación se conoce como *perturbación regular.*

(d) Muestre que la solución está dentro del ánulo encontrado previamente.

(e) Compare mediante simulaciones numéricas la solución analítica encontrada y exacta. ¿Cómo depende el error de $\mu$?

8. Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la es subcrítica o supercrítica.

(a) (*) $\dot{x} = y + \mu x, \qquad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$

(b) (*) $\dot{x} = \mu x + y - x^3, \qquad \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$

(c) $\dot{x} = \mu x + y - x^2, \qquad \dot{y} = -x + \mu y + 2x^2$

9. (*) Considere el sistema predador-presa,

$$\dot{x} = x(b - x - \frac{y}{1+x}), \quad \dot{y} = y(\frac{x}{1+x} - ay) \tag{3}$$

donde $x, y \geq 0$ son las poblaciones y $a, b > 0$ son parámetros.

(a) Dibuje las nulclinas y discuta las bifurcaciones que ocurren si $b$ cambia.

(b) Usando un método gráfico muestre que hay un punto fijo $x^*, y^* > 0$, para todo $a, b > 0$.

(c) Muestre que ocurre una bifurcación de Hopf en $(x^*, y^*)$ si $a = a_c = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)}$, donde $b > 2$.

(d) Mediante simulaciones numéricas compruebe el resultado anterior y muestre si la bifurcación es subcrítica o supercrítica.

10. (*) **Sistema excitable.** Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fitzhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 - xy \end{aligned}$$

(a) Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i) $b > 0$ $a < 0$, (ii) $b < 0$ $a > 0$ y $b >> a$.

(b) Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación *saddle-node*.

(c) Encuentre la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.

(d) En el espacio de paraámetros $(a, b)$ represente como curvas las dos condiciones anteriores y ensaye un retrato de fases en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano. A partir del gráfico deduzca la necesidad de una conexión homoclínica adicional a las bifurcaciones anteriores.