

Guía 5 Dinámica no lineal - Reducción a la variedad central

Cátedra G. Mindlin

1er Cuatrimestre 2022

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios el resto son optativos, pero recomendados.

1. Estudie la dinámica cerca del origen de los siguientes sistemas. Dibuje los retratos de fases, y calcule la variedad central y la dinámica sobre ella. Diga si el origen es estable o inestable.

(a) (*)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x/2 + y + x^2y \\ \dot{y} &= x + 2y + y^2\end{aligned}\tag{1}$$

(b) (*)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin \theta\end{aligned}\tag{2}$$

(c)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2\end{aligned}\tag{3}$$

2. Estudie los siguientes sistemas dinámicos parametrizados por ϵ . Para $\epsilon = 0$ el origen es un punto fijo. Calcule la variedad central que depende de un parámetro y describa la dinámica en la variedad. Fíjese que en $\epsilon = 0$ los sistemas coinciden con los del ejercicio 1. Discuta el rol que juega el parámetro si multiplica el término lineal o no lineal.

(a)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x/2 + y + x^2y \\ \dot{y} &= x + 2y + \epsilon y + y^2 \end{aligned} & ii) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x/2 + y + x^2y \\ \dot{y} &= x + 2y + \epsilon y^2 + y^2 \end{aligned} \end{array}\tag{4}$$

(b) (*)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + \epsilon v + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin \theta \end{aligned} & ii) \quad \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + \epsilon v^2 + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin \theta \end{aligned} \end{array}\tag{5}$$

(c)

$$\begin{array}{ll} i) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + \epsilon y \\ \dot{y} &= -y - x^2 \end{aligned} & ii) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + \epsilon y^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2 \end{aligned} \end{array}\tag{6}$$

3. (*) Se quiere estudiar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon(-x + xy) \\ \dot{y} &= -y + x^2\end{aligned}\tag{7}$$

Como hemos visto en ejercicios anteriores, este sistema tiene dos escalas de tiempo y por lo tanto se podrá reducir su dimensión. La idea de este problema es formalizar la manera en que se venía haciendo esa reducción. La propuesta es resolverlo primero a la vieja usanza y luego resolverlo reduciendo a la variedad central.

- (a) Para $\epsilon \ll 1$ encuentre la ecuación diferencial a la cual se aproxima el problema
- (b) Pensando a ϵ como un parámetro, muestre que el origen es un punto de bifurcación si $\epsilon = 0$, es decir hay algún autovalor $\lambda = 0$ y por lo tanto se podrá reducir a la variedad central.
- (c) Reduzca el sistema a la variedad central y encuentre la dinámica sobre la misma (para esto conviene hacer el truco de pensar a ϵ como una variable y agregar una ecuación simple para su dinámica $\dot{\epsilon} = 0$). ¿Encontró lo mismo que haciéndolo a "ojo"?

Nota: Si salió todo bien uno debería recuperar la misma dinámica con cualquiera de los dos métodos. Reduciendo a la variedad central uno demostró que en un entorno del origen, y para ϵ lo suficientemente chicos, existe una solución $u(t)$ del sistema reducido que cumple con

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t), \epsilon) + O(e^{\gamma t}) \end{aligned} \tag{8}$$

con $\gamma > 0$ una constante.

4. El sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= ay - y^3 + xy \end{aligned} \tag{9}$$

presenta dos bifurcaciones.

- (a) Calcule los puntos fijos (no se complique con una expresión explícita, pero muestre claramente en forma gráfica las soluciones)
- (b) Muestre que uno de los autovalores del jacobiano se anula en cada bifurcación. Nombre cada bifurcación e identifique el punto fijo que está bifurcando en cada caso.
- (c) Considere un entorno del origen. En términos del método de la variedad central: ¿para qué valores del parámetro espera poder reducir la dinámica a una descripción unidimensional?
- (d) Calcule la variedad central que depende del parámetro. Reduzca la dinámica a la variedad central e identifique la bifurcación que quedó incluida. ¿Coincide con el resultado del ítem 2?