Guía 7 Dinámica no lineal - Mapas
Cátedra G. Mindlin

1er Cuatrimestre 2022

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios el resto son optativos, pero recomendados.

1. **(*) Construcción de un Mapa de Poincaré:** Considere la siguiente ecuación diferencial de un oscilador con disipación forzado periódicamente $\delta > 0$:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = cos(\omega t)$$

   (a) Encuentre la solución general del sistema homogéneo teniendo en cuenta los valores posibles de $\delta^2 - 4\omega_0^2$. ¿A qué tiende la solución $x_h(t)$ con t tendiendo a infinito?

   (b) Halle la solución particular $x_p(t) = Acos(\omega t) + Bcos(\omega t)$. Escriba la solución general $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ para el caso $\delta^2 - 4\omega_0^2 \leq 0$ y obtenga los valores de las constantes. De su expresión a partir de las condiciones iniciales (x_0, y_0) en $t = 0$.

   (c) Reescriba la ecuación del oscilador como un sistema de ecuaciones y conviértala en un sistema autónomo definiendo la variable $\dot{\theta} = \omega$.

   (d) Defina la sección Σ de Poincaré correspondiente a la condición $\theta = 0 \in S1$. Encuentre el tiempo T que transcurre entre cada intersección del flujo con Σ. Escriba, a partir de la solución en b) con las condiciones iniciales, el mapa $P : \Sigma \to \Sigma$.

   (e) Compruebe que $(x, y) = (A, \omega B)$ es un punto fijo del mapa. Encuentre los autovalores de su parte lineal. ¿Es este punto asintóticamente estable? Dibuje la trayectoria de los puntos en el plano (x, y).

   (f) ¿Qué ocurre cuando hay resonancia $\omega = (1/2)\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$?

2. Mapas lineales. Analice los siguientes mapas. Compute las órbitas e ilústrelas en el espacio de fases. Describa la variedad estable, inestable y central en el origen.

$$\begin{array}{lccll} i) & x & \to & \lambda x, & |\lambda| < 1, |\lambda| < 1 \\ & y & \to & \mu y, & |\mu| > 1, |\mu| < 1 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{lccll} (*)ii) & x & \to & \lambda x - \omega y, & \omega > 1 \\ & y & \to & \omega x + \lambda y & \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{lccll} i) & x & \to & x & \\ & y & \to & \lambda y, & |\lambda| < 1 \end{array} \tag{3}$$

3. Mapas no lineales.

   (a) Considere el siguiente mapa unidimensional cuadrático:

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

      i. Encuentre y clasifique los puntos fijos en función de c.

      ii. Encuentre los valores de c para los cuales el punto fijo se bifurca y clasifique dichas bifurcaciones.

iii. ¿Para qué valores de c hay una órbita estable de período 2? Grafique un diagrama de bifurcaciones del mapa, e indique la orbita de período 2 y su estabilidad.

(b) Analice el siguientes mapa bidimensional.

$$\begin{array}{lcll} x & \rightarrow & (1-x)x + by, & \quad b > -1/16 \\ y & \rightarrow & y/2 + x & \end{array} \tag{4}$$

i. Encuentre sus puntos fijos y discuta su estabilidad en la aproximación lineal.

ii. Encuentre a partir de los autovectores las variedades estable e inestable dibujando retratos de fases. ¿Se pueden encontrar órbitas periódicas de orden superior?

4. **Mapa logístico**

La versión discreta del modelo logístico de crecimiento es uno de los ejemplos paradigmáticos de mapas simples con comportamiento complejo:

$$x \rightarrow \mu x(1-x) \qquad \mu \in [0,4]$$

Encuentre los puntos fijos y algunas órbitas de período bajo del mapa . Diga que ecuación debe cumplir μ para que existan órbitas de período 2. ¿Puede encontrar valores de bifurcación en los que aparecen nuevas órbitas periódicas?

5. **Mapa de Henon**

(a) Encuentre los puntos fijos de periodo uno y de periodo 2 para el siguiente mapa de Henon:

$$x_{n+1} = \frac{3}{50} - x_n^2 + \frac{9}{10} y_n; \qquad y_{n+1} = x_n$$

(b) Muestre que el mapa dado por:

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n; \qquad y_{n+1} = \beta x_n$$

tiene una bifurcación de período 1 a periodo 2 en $\alpha = 3(\beta-1)^2/4$. Estudie el diagrama de bifurcaciones del mapa graficando x_n como función de α cuando $\beta = 0.4$.

(c) Aplique numéricamente el mapa del ítem anterior con $\alpha = 1.2$ y $\beta = 0.4$ e itere dos veces consecutivas el mapa. ¿Qué es lo que le pasa al cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$? Relaciónelo con el ejercicio siguiente.

6. **Mapa de la herradura (Mapa de Smale)** Trabajando en la aproximación al conjunto invariante aplicando tres veces el mapa

$$F^{-3}(s) \cap F^{-2}(s) \cap F^{-1}(s) \cap s \cap F^1(s) \cap F^2(s) \cap F^3(s)$$

donde $F(s)$ es:

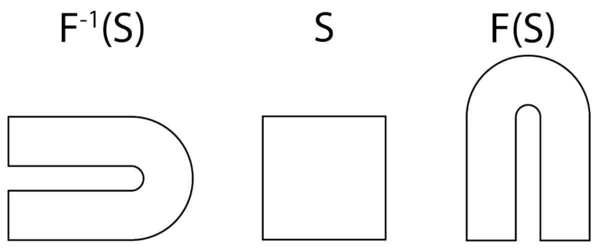

Figure 1: Mapa de Smale

(a) Nombre todos los sectores en la aproximación (ayúdese con la figura)

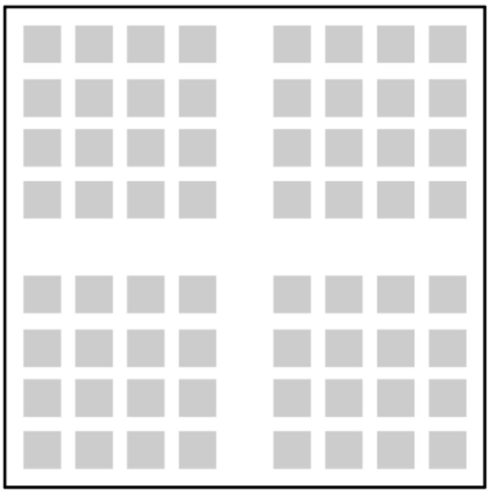

Figure 2: Mapa de Smale aproximación al conjunto invariante aplicando tres veces el mapa

(b) Ubique en qué casilleros caen:

i. $[001, 100, 010]$

ii. $[01, 10]$

iii. $[011, 101, 110]$

iv. $[1]$ y $[0]$