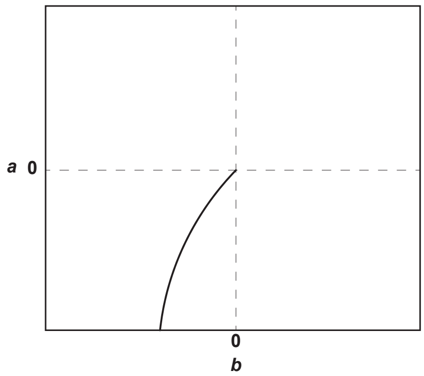
Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin
1er cuatrimestre 2020

Tema: Bifurcaciones 2D

Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fizhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular. Este modelo, bajo ciertas condiciones, puede escribirse como:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = a + bx + x^2 - xy$$

Dado este modelo, se quiere completar el diagrama de bifurcaciones en el espacio de parámetros (b,a) de la Figura. La curva mostrada corresponde a una bifurcación homoclínica.



(a) Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i) a>>b (a>0) (ii) a<0, b>0.

(b) Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación de *Saddle-Node*.

(c) Halle la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.

(d) El sistema tiene una transición nodo-espiral. Muestre que esto ocurre cuando:

$$a^2 + 64a - 16ab = 16b^2 - 4b^3 \quad (*)$$

Ayuda: piense en la condición que debe cumplirse en esta transición.

(e) Muestre que, en la cercanía de (b,a)=(0,0), la curva anterior es cercana a $a \sim \frac{b^2}{4}$. Para esto, reemplace la igualdad en (*) y desprecie términos mayores a orden 3 luego de reemplazar. *[Ayuda: en realidad, la curva hallada en (d) se despega de la aproximación estudiada en este inciso a medida que b aumenta, pero este análisis debería ayudarle a esquematizar la curva correspondiente].*

(f) En el espacio de parámetros (b,a) represente como curvas las condiciones anteriores para completar el diagrama de bifurcaciones de la figura. Indique y justifique la cantidad de puntos fijos y su estabilidad en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano.

(g) Esquematice un retrato de fases compatible con la información obtenida para cada región.

Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin
1er cuatrimestre 2020

Tema: Variedad Central

El sistema:

$$\dot{x} = -x + x^2 - y^2$$
$$\dot{y} = ay - y^3 + xy$$

presenta dos bifurcaciones.

(a) Calcule los puntos fijos (si no encuentra una expresión explícita, muestre su existencia gráficamente)

(b) Muestre que uno de los autovalores del Jacobiano del sistema se anula en cada bifurcación. Nombre cada bifurcación e identifique el punto fijo que está bifurcando en cada caso.

(c) Considere un entorno del origen. En términos del método de la variedad central: ¿para qué valores del parámetro espera poder reducir la dinámica a una descripción unidimensional? ¿Por qué?

(d) Calcule la variedad central que depende del parámetro a. Reduzca la dinámica a la variedad central e identifique la bifurcación que quedó incluida. ¿Coincide con el resultado del ítem b?

(e) Dibuje retratos de fase compatibles con la información obtenida para las distintas condiciones según el parámetro a cerca de la bifurcación y [**opcional**]: compárelos con retratos de fase obtenidos por integración numérica

Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin
1er cuatrimestre 2020

Tema: Formas normales

Dado el sistema:

$$\dot{x} = ax + y + y^2$$
$$\dot{y} = -y + x^2 + xy$$

Se quiere llevar el sistema a su forma normal.

a) ¿Cuánto debe valer a para que la forma normal a orden 2 pueda escribirse de la siguiente manera?

$$\dot{u} = au + c_1 v^2$$
$$\dot{v} = -v$$

con c_1 un coeficiente real.

b) Analice, al mismo orden, la posibilidad de otros términos resonantes en función del valor del parámetro a.

c) Para el caso hallado en (a), encuentre los términos resonantes para todo orden.

Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin - 1er cuatrimestre 2020
Tema: Mapas

Se tiene un oscilador no-lineal forzado periódicamente mediante la función $p(t)$:

$$\dot{z} = (1 + iw_0)z - z|z|^2 + i\varepsilon p(t)$$

Con $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$. Note que esta ecuación es la forma normal de una bifurcación de Hopf a la que se añade una perturbación periódica de período T a la variable imaginaria del problema.

[Construcción del mapa]

a) Escriba las ecuaciones de evolución temporal para la amplitud (R) y fase (ϕ), usando que $z = Re^{i\phi}$.

b) Se quiere estudiar la dinámica del sistema forzado a partir de la construcción de un mapa para la evolución de las variables R y ϕ. Sabiendo que la solución a las ecuaciones escritas en (a) para la evolución entre los pulsos está dada por:

$$R(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{1 - R_0^2}{R_0^2})e^{-2t}}}$$

$$\phi(t) = \phi_0 + w_0 t$$

i) [Simplificación] Muestre que la parte radial es una perturbación que en la cercanía del pulso siguiente (R(T)) converge al caso R=1 (ciclo límite) si T>>1. En términos de un mapa, esto nos daría $R_{n+1} = 1$. Por esto nos concentraremos sólo en la evolución de la variable $\phi(t)$.

c) Sabiendo que la perturbación ocurre en la parte imaginaria, escriba la fase justo luego de un pulso del forzante (ϕ_+) en función de las variables justo antes (R_-, ϕ_-). Para esto, escriba $x_+ = x_-$ e $y_+ = y_- + \varepsilon$, con $x_- = Rcos(\phi)$ e $y_- = Rsen(\phi)$. Una vez escrito en cartesianas, busque su fase. Recuerde que: $\phi_z = tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

Muestre que $\phi_+ = tan^{-1}(\tan(\phi_-) + \varepsilon/(R_- \cos(\phi_-))$

d) La expresión hallada en c) puede simplificarse para el caso ε <<1.
Muestre que en este caso $\phi_+ \approx \phi_- + \varepsilon\cos(\phi_-)$.

[Ayuda]: use que la expansión en Taylor a orden 1 alrededor del 0 para la arcotangente viene dada por: $tan^{-1}(f(x)) = tan^{-1}(f(0)) + \frac{f'(0)}{1+f(0)^2}\varepsilon$.

e) Reemplace el resultado obtenido en (d) en la ecuación para la fase de (b) y llegue al mapa del círculo:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon\cos(\phi_n)$$

Con $\eta = w_0 T = 2\pi T/T_0$.

[Análisis del mapa]

f) Busque órbitas periódicas de período 1 en este mapa ($\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi$). Analice para qué relación debe existir entre T/T_0 y ε para que esta solución exista.

g) Dé una relación entre los parámetros del problema para que ocurra una bifurcación de duplicación de período.

h) Busque órbitas de período 2, despreciando términos cuadráticos en ε en la composición del mapa consigo mismo.
[Ayuda]: para cumplir esto, utilice la aproximación: $\cos(a + x) = \cos(a)$
Como en (f), busque la cota que debe cumplir T/T_0 para que esta solución exista.
Nota: esta aproximación es una sobresimplificación respecto a considerar la composición del mapa a orden 2 completo. Donde sea necesario, acote los cosenos por su máximo valor.

i) En un diagrama (T/T_0, ε) grafique las condiciones halladas en (f) y (h). ¿Qué significado físico tienen estas soluciones?