

Vórtice de Rankine como modelo de vórtice de vaciado

[relacionado al Problema 2 de la Guía 3]

P Cobelli

1. Introducción

En clase les propuse repensar el ejercicio 10 de la guía como un problema en el cual, en lugar de modelar un ciclón, buscamos modelar el campo de velocidades asociado al vaciado de un líquido contenido en un recipiente (abierto a la atmósfera) a través de un agujero en su base. Atención: hacemos esto pensando en que el modelo que construimos es válido lejos de la abertura de salida. No nos ocuparemos, al menos en este momento, de lo que pasa cerca de la abertura de salida (lo haremos más adelante en el curso).

Les propuse entonces **–como ejercicio optativo y a condición de hacerlo únicamente al cabo de haber resuelto todos los ejercicios de la guía–** calcular, a partir de las expresiones obtenidas en clase para el campo de velocidades y la presión, la forma de la superficie libre que se encuentra a presión atmosférica p_0 .

2. Forma de la superficie libre

En primer lugar, calculemos la diferencia en altura de la superficie libre en el origen y muy lejos de él:

$$r = 0 : \quad p_0 = -\rho g z_0 + C_1, \quad (1)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad p_0 = -\rho g z_\infty + C_2, \quad (2)$$

de lo cuál deducimos que

$$z_\infty - z_0 = \frac{C_2 - C_1}{\rho g} = \frac{\Omega^2 a^2}{g}. \quad (3)$$

Para determinar la forma de la superficie libre, utilizamos que sobre dicha superficie la presión es la presión atmosférica. Entonces en cada región ($0 < r < a$ y $r > a$), calculamos la altura a la que la superficie libre se encuentra a partir de la expresión para la presión:

$$p_0 = \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C_1, \quad 0 < r < a, \quad (4)$$

$$p_0 = -\frac{\rho \Omega^2 a^4}{2r^2} - \rho g z + C_2, \quad r > a. \quad (5)$$

De lo que se obtiene la posición vertical de la superficie libre, $z_{sl}(r)$, en cada región:

$$z_{sl}(r) = \begin{cases} \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \frac{C_1 - p_0}{\rho g}, & 0 < r < a, \\ -\frac{\rho \Omega^2 a^4}{2gr^2} + \frac{C_2 - p_0}{\rho g}, & r > a. \end{cases} \quad (6)$$

De esta última expresión, y dado que C_1 y C_2 son constantes, ya podemos observar la dependencia funcional de $z_{sl}(r)$ en cada región. En el interior del vórtice (en su núcleo o *core*), tenemos $z_{sl}(r) \propto r^2$, mientras que en la región exterior es $z_{sl}(r) \propto r^{-2}$. Notemos entonces, como les anticipé en clase, que obtuvimos un perfil para la superficie libre cuya curvatura cambia conforme estemos dentro o fuera del núcleo del vórtice.

Para obtener una expresión completa en donde sólo aparezcan explícitamente las variables del problema (y no, p.ej., C_1 y C_2 , establezcamos el origen de alturas de forma tal que coincida con la posición vertical de la superficie libre en $r = 0$. Esto es, hagamos: $z_{sl}(r = 0) = 0$, lo cuál es siempre lícito dado que corresponde a fijar nuestro origen de coordenadas. Luego es fácil ver que $C_1 = p_0$, y luego de un poco de álgebra elemental obtenemos finalmente:

$$z_{sl}(r) = \begin{cases} \frac{\Omega^2 r^2}{2g}, & 0 < r < a, \\ \frac{\Omega^2 a^2}{g} \left(1 - \frac{a^2}{2r^2}\right), & r > a, \end{cases} \quad (7)$$

que nos da el perfil de la superficie libre buscado. La Fig. 1 muestra gráficamente la dependencia de este perfil con la coordenada radial, para un juego de valores particulares de a, Ω y g .

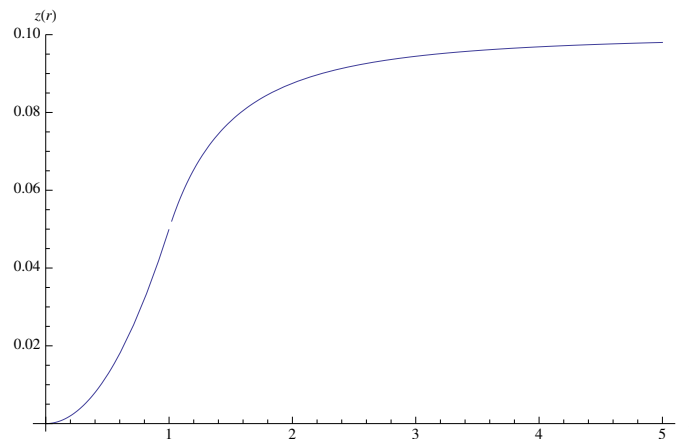


Figura 1: Perfil de la superficie libre en función de la coordenada radial, correspondiente a $\Omega = 1, a = 1, g = 10$. Noten la diferencia entre escalas en los ejes horizontal y vertical.

Para aquellos interesados, este gráfico fue generado en MATHEMATICA empleando las siguientes 2 líneas de comandos (en la primera asignamos valores a las variables, en la segunda graficamos la función):

```
a = 1; W = 1; g = 10;  
Plot[Piecewise[{{W^2*r^2/2/g, r < a}, {W^2*a^2/g*(1 - a^2/2/r^2), r > a}},  
{r, 0, 5}, Axes -> True, AxesLabel -> {r, z[r]}].
```

Observamos entonces que, en el núcleo, el perfil de la superficie libre es cóncavo y parabólico (la superficie de un líquido en rotación rígida adopta el mismo perfil; Prob. 9 de la Guía 2). En la región externa, por el contrario, la curvatura es convexa dado que la velocidad disminuye con la distancia: el perfil resulta de tipo hiperbólico.

Para saber más

Les recomiendo (de forma opcional, claro está) la lectura de dos trabajos experimentales directamente relacionados con este tema:

- (1) Andersen et al., Anatomy of a bathtub vortex, *Phys. Rev. Lett.* **91**:10 (2003).
- (2) Halász et al., Vortex flow generated by a magnetic stirrer, *Am. J. Phys.* **75**:12 (2007).