GUIA 1

VECTORES Y TENSORES

Contenidos temáticos: vectores — pseudovectores — tensores y densidades tensoriales (o pseudotensores) — delta de Krönecker — densidad tensorial de Levi-Civita — tensores isótropos — descomposición de un tensor de segundo orden — cálculo de identidades y operadores vectoriales en notación indicial.

□ **Problema 1.** DELTA DE KRÖNECKER Y DENSIDAD TENSORIAL DE LEVI-CIVITA

La delta de Krönecker es un tensor isótropo de segundo orden cuyas componentes están dadas por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

con $1 \leq i, j \leq 3$. La densidad tensorial de Levi-Civita es un pseudotensor de tercer orden con componentes

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i,j,k\} \text{ son una permutación par de la terna } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{si } \{i,j,k\} \text{ son una permutación impar de la terna } \{1,2,3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(I) Verifique, en el caso de versores cartesianos, que ambas densidades tensoriales son isótropas; es decir, que sus componentes son las mismas en cualquier sistema de coordenadas.

(II) Visualice gráficamente la densidad tensorial ε_{ijk}. ¿Cuántos elementos tiene?

(III) Compruebe la identidad:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

(IV) Verifique las siguientes identidades:

(I) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$

(II) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

(III) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

(IV) $\delta_{mn}\delta_{mn} = 3$

(V) Si $\{\hat{e}_i, \;\; i = 1,2,3\}$ es una terna de versores ortogonales, verifique que:

(I) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i$

(II) $\nabla \times \mathbf{C} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial C_k}{\partial x_j} \hat{e}_i$

□ **Problema 2.** DESCOMPOSICIÓN DE UN TENSOR DE SEGUNDO ORDEN

Demuestre que todo tensor de segundo orden σ_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ se puede descomponer como

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij}$$

donde λ es un escalar, s_{ij} es un tensor simétrico de traza nula, y a_{ij} es un tensor antisimétrico.

□ **Problema 3.** IDENTIDADES VECTORIALES EMPLEANDO NOTACIÓN INDICIAL

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{s}$ cuatro vectores, y ψ y ϕ dos funciones escalares. Utilizando notación indicial, verifique las siguientes identidades:

(I) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(II) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(III) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

(IV) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$

(V) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

(VI) $\nabla \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, donde $r = |\mathbf{r}|$

(VII) $\nabla \left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

(VIII) $\nabla \times \nabla \phi = 0$

(IX) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$

(X) $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi)$

(XI) $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi$

(XII) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(XIII) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

(XIV) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi$

(XV) $\nabla \times (\phi\mathbf{u}) = \phi\nabla \times \mathbf{u} + \nabla\phi \times \mathbf{u}$

(XVI) $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v}$

(XVII) $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u})$

(XVIII) $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$

(XIX) $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$