Guia 2

Cinemática

Contenidos temáticos: cinemática de medios continuos — descripciones lagrangiana y euleriana — derivada material — trayectorias — lineas de corriente y de traza — vorticidad — determinación de campos de velocidades en función de sus simetrías.

☐ **Problema 1.** Descripciones euleriana y lagrangiana

Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = f(z),$$

para $t \geq 0$ y $z \geq 0$. Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

☐ **Problema 2.**

Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),$$

donde T_0, α, L y τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante U.

(i) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geométricamente las componentes de la derivada total.

(ii) Repita el punto (i) para una descripción lagrangiana.

¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

☐ **Problema 3.** Trayectorias, líneas de corriente y líneas de trazas

Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades:

(i) Una corriente uniforme $\mathbf{u}(x,t) = U\hat{x}$.

(ii) Una fuente lineal de caudal constante $\mathbf{u}(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$.

(iii) Un torbellino con circulación constante $\mathbf{u}(r,\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$.

(iv) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad U aumenta linealmente con el tiempo.

(v) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad U' de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ.

☐ **Problema 4.**

Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x,y,t) = \frac{\alpha x}{1+\beta t}, \qquad v_y(x,y,t) = c,$$

donde α, β y c son constantes con las dimensiones apropiadas. Grafique las distintas líneas en dos casos distintos:

(I) $\alpha = \beta$,

(II) $\alpha = 2\beta$.

☐ **Problema 5.**

Una esfera de radio R_0 en $t = 0$ se expande para $t > 0$ de acuerdo a la ley

$$R = R(t), \quad R(0) = R_0.$$

Encuentre dicha ley sabiendo que para $t > 0$ y $r > R(t)$, la velocidad de las partículas de fluido es $v_r(r) = v_0 R_0^2 / r^2$.

☐ **Problema 6.** Vector 'remolino'

Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la vorticidad es $\vec{\omega} = 2\,\vec{\Omega}$.

☐ **Problema 7.** Cálculo de la vorticidad

Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades:

(I) $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$,

(II) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$,

(III) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - e^{-r^2/(4\nu t)}\right]$,

(IV) $v_x = v_0 y / L$.

☐ **Problema 8.**

Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:

(I) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.

(II) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección $\hat{z}$.

(III) Idem (b) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano (x, y) y contiene al origen, es el mismo.