Estructura de la Materia 1

Práctica 1: Vectores y tensores cartesianos

1. Sean la densidad tensorial de 2^{do} orden δ_{ij} (llamada delta de Krönecker) y la densidad tensorial isótropa de 3^{er} orden ϵ_{ijk} (llamada pseudotensor de Levi-Civita), que se definen como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i,j,k\} \text{ es una permutación par de 1,2,3,} \\ -1 & \text{si } \{i,j,k\} \text{ es una permutación impar de 1,2,3} \\ 0 & \text{si por lo menos dos indices son iguales.} \end{cases} \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

   a) Visualiza gráficamente en dos y tres dimensiones, segun corresponda, las densidades tensoriales propuestas. ¿Cuántos elementos tienen?, ¿Cuántos son distintos de cero?.

   b) Comprueba (**no demostrar**) la identidad

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

   c) Verifica que:

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr} \qquad \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijs} = 2\delta_{ks}$$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6 \qquad \delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

   d) Si $\{\hat{e}_i\}$ es una terna ortonormal de $\mathbb{R}^3$, verifica que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i \qquad \operatorname{rot} \vec{C} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial C_k}{\partial x_j} \hat{e}_i$$

   e) Si $\mathbb{B}$ es la matriz definida por $\mathbb{B} = \{B_{ij}\}$, entonces $|\mathbb{B}| = \det\{B_{ij}\} = \epsilon_{rst} B_{r1} B_{s2} B_{t3}$

2. Demuestra que todo tensor de 2^{do} orden σ_{ij}, sobre $\mathbb{R}^n$, se puede expresar como la suma de un tensor isótropo σ^I_{ij}, un tensor simétrico de traza nula σ^S_{ij} y un tensor antisimétrico σ^A_{ij}, es decir, $\sigma_{ij} = \sigma^I_{ij} + \sigma^S_{ij} + \sigma^A_{ij}$. ¿Cuántos elementos independientes tiene cada uno de los tensores que forman la descomposición anterior?.

3. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}$ campos vectoriales y ϕ, ψ campos escalares, todos definidos sobre $\mathbb{R}^3$. Utilizando notación indicial, verifica las siguientes igualdades:

   a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

   b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

   c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{s}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{s}) - (\vec{u} \cdot \vec{s})(\vec{v} \cdot \vec{w})$

   d) Si $\vec{r}$ el vector posición de un punto en $\mathbb{R}^3$ entonces: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$, $\operatorname{rot} \vec{r} = 0$, $\operatorname{grad} \vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ y $\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$. Si $\vec{r}$ el vector posición de un punto en $\mathbb{R}^2$ entonces: $\operatorname{div} \vec{r} = 2$, ¿Se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$?

   e) $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \phi) = 0$.

   f) $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{u}) = 0$.

   g) $\Delta\psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$.

   h) $\Delta(\phi\psi) = \phi(\Delta\psi) + \psi(\Delta\phi) + 2 \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi$

   i) $\operatorname{grad} (\phi\psi) = \psi \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \psi$

   j) $\operatorname{div} (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\operatorname{rot} \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\operatorname{rot} \vec{v})$

   k) $\operatorname{div} \phi\vec{u} = \phi \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \phi$

   l) $\operatorname{rot} (\phi \vec{u}) = \phi \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{grad} \phi \times \vec{u}$

   m) $\operatorname{rot} (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{div} \vec{u} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}$

   n) $\operatorname{grad} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} + \vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{u}$

   ñ) $\Delta\vec{u} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{u}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{u})$

   o) $(\vec{u} \cdot \operatorname{grad})\vec{u} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{u}$