Estructura de la Materia 1

Práctica 2: Cinemática

1. Se tiene un campo de velocidades que en la descripción euleriana está expresado por:

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = f(x_3), \qquad t \geq 0, x_3 \geq 0$$

Encuentra la descripción lagrangiana de este movimiento. Luego aplícala al caso especial de la caída de agua en una cascada.

2. La temperatura en el interior de un túnel viene dada por:

$$T(x,t) = T_0 - \alpha e^{x/L} \operatorname{sen}(2\pi\, t/\tau)$$

donde T_0, α, L, τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante $\vec{u} = U\,\hat{\imath}$. Halla:

   a) la variación de temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula en la descripción euleriana. Grafica la temperatura para instantes t_1 y t_2 (próximos) e interpreta geométricamente las componentes de la derivada material.

   b) igual que en el punto anterior pero en la descripción lagrangiana. ¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

3. Halla las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades:

   a) Una corriente uniforme.

   b) Una fuente lineal de caudal constante.

   c) Un torbellino de ciculación constente.

   d) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una crriente uniforme cuya velocidad aumenta linealmente con el tiempo.

   e) Una corriente uniforme (de velocidad constante) superpuesta a una corriente uniforme ortogonal a la primera cutya velocidad es pulsante.

4. Determina las lineas de corriente, las trayectorias y las lineas de traza correspondientes al campo de velocidades dado por:

$$u(x,y,t) = \frac{\alpha x}{1+\beta t}, \qquad v(x,y,t) = c$$

donde α, β y c son constantes con las dimensiones apropiadas. Graficalas tomando $\alpha = \beta$, y $\alpha = 2\beta$

5. Una esfera de radio R_0 en $t = 0$, se expande para $t > 0$ de acuerdo a la ley $R(t)$. Encuentra dicha ley, sabiendo que para $t > 0$, $r > R(t)$, las partículas de fluido se mueven con una velocidad radial $v(r) = \frac{v_0 \, R_0^2}{r^2}$

6. Calcula las deformaciones longitudinales, de corte y volumétrica para los flujos del problema 3.

7. Muestra que para un fluido rotante con vector rotación $\vec{\Omega}$, la vorticidad viene dada por $\vec{\omega} = 2\,\Omega$.

8. Calcula la vorticidad de los siguientes campos de velocidades y grafícalos.

   a) $v_\theta(r,t) = v_0 \,[1 - \alpha r \, t]$
   b) $v_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi \, r}$
   c) $v_\theta(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi \, r}\left[1 - e^{-\frac{-r^2}{4\nu \, t}}\right]$
   d) $v_x = v_{0x}\frac{y}{h}$

9. Utilizando el teoremas de Gauss o de Stokes, según corresponda, determina:

   a) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.
   b) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección del versor $\hat{k}$.
   c) Idem b) pero ahora el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano xy y contiene al origen, es el mismo.