Estructura de la Materia 1

Práctica 5: Fluidos ideales, flujo potencial. Teorema de Blasius

1. Los siguientes fluidos incompresibles e invísidos, fluyen de tal manera que su movimiento puede ser considerado bidimensional (2D), es decir, que existe simetría de translación según un eje cartesiano, digamos el $\hat{k}$. Determina: el campo de velocidades $\vec{u}(x, y)$, su rotor $\vec{\omega}(x, y) = \operatorname{rot} \vec{u}$, la función corriente $\Psi(x, y)$ y el gráfico de las líneas de corriente, cuando el flujo está generado por:

   a) una corriente uniforme al infinito, de rapides constante U_∞ y que forma un ángulo α con el eje $\hat{\imath}$.

   b) Una distribución lineal de fuentes o sumideros de caudal $\pm Q$, respectivamente.

   c) Un filete vorticoso o vórtice de circulación Γ.

   d) Un dipolo formado por una fuente y un sumidero de idéntico caudal (en módulo) Q.

   e) Un dipolo formado por dos vórtices de circulación Γ iguales (en módulo) y opuestas.

2. Para las siguientes funciones corriente

$$\Psi(x, y) = a\, y$$
$$\Psi(x, y) = b\, y^2$$
$$\Psi(x, y) = c\, xy$$
$$\Psi(x, y) = d\,(3x^2 - y^2)\, y$$

   calcula:

   a) el campo de velocidades.

   b) Los puntos de estancamiento.

   c) Su vorticidad.

   d) Grafica las líneas de corriente.

3. El movimiento de un fluido incompresible e irrotacional con simetría de translación según el eje $\hat{k}$ (problemas 2D), puede ser estudiado bajo el formalismo del potencial complejo. La hipótesis de incompresibilidad conduce a la existencia de un potencial vector $\vec{A}$, tal que $\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{A}$. y la condición de irrotacionalidad, establece la existencia de un campo escalar ϕ tal que la velocidad del fluido se obtiene de él como $\vec{u} = \operatorname{grad} \phi$. En el caso bidimensional, el potencial complejo tiene sólo componente z, esto es, $\vec{A} \equiv \Psi(x, y)\, \hat{k}$. El campo $\Psi(x, y)$ es la función corriente del problema. Verifica que se cumple:

a) $\operatorname{div} u = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\Psi}\hat{k}) = 0$

b) $\vec{u} = \operatorname{grad} \Psi \times \hat{k}$

c) las condiciones de Cauchi-Riemann y que son funciones armónicas.

d) La condición anterior permite definir la función potencial en el plano complejo $W(z) = \phi(x,y) + i\,\Psi(x,y); z = x + i\,y$ que verifica:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = -i\,\frac{W}{\partial y}.$$

e) Si se define la velocidad compleja $\tilde{u} = u_x + i\,u_y$ entonces: $\frac{dW}{dz} = \tilde{u}^*$, donde w^* denota el complejo conjugado de w

4. Calcula el potencial complejo para los flujos presentados en el problema 1.

5. Considera un flujo bidimensional invísido e incompresible producido por las siguientes singularidades:

   a) Una fuente/sumidero de caudal $Q/-Q$ ubicada frente a un plano, solido, infinito a una distancia d.

   b) Una fuente/sumidero de caudal $Q/-Q$ ubicada a una distancia $\sqrt{2}d$ en la bisectriz a dos planos sólidos, semi–infinitos y ortogonales.

   c) Una fuente/sumidero de caudal $Q/-Q$ ubicada a una distancia d de dos planos sólidos, paralelos e infinitos.

   d) Un vórtice de circulación Γ (positiva) a distancia d, de un plano sólido infinito.

   e) Un dipolo de intensidad μ_0 que forma un ángulo α respecto del eje real y que se encuentra a una distancia d de un plano sólido infinito. Particulariza para el caso $\alpha = \pi$, dipolo enfrentando al plano. para cada ítem calcula, el potencial complejo, el potencial de velocidades, la función corriente, el campo de velocidades, los puntos de estancamiento y grafica cualitativamente las lineas de corriente.

6. Los contornos sólidos pueden simularse con un potencial tal que la frontera del mismo sea una línea de corriente. Verifica que un dipolo de intensidad μ enfrentado a un flujo uniforme al infinito de rapidez U_∞, es equivalente al de el mismo flujo uniforme que embiste un cilindro de radio $a = \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty}}$ cuyo centro se encuentra en la misma posición que el dipolo.

7. Mediante el teorema del circulo, halla el potencia generado por un flujo, estacionario, uniforme al infinito que embiste a un cilindro de radio a, en reposo. Encuentra la distribución de presiones sobre el contorno del cilindro y halla los puntos de estancamiento.

8. Considera un líquido invísido que ocupa el interior de un cilindro de radio a. En el interior de este cilindro se encuentra una fuente, de caudal Q y un sumidero de caudal $-Q$. Ambas singularidades se encuentran en un diámetro del cilindro; como se muestra en la figura 1. Halla el potencial de velocidades y realiza un diagrama cualitativo de las líneas de corriente.

9. Para las configuraciones que se presentan en la figura 2:

   a) haz un diagrama cualitativo de la líneas de corriente.

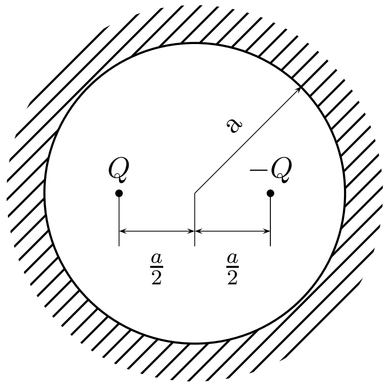

Figura 1: Problema 8

b) Escribe el potencial complejo correspondiente.

c) Halla los puntos de estancamiento.

d) Grafica la presión como función de la posición, para puntos del contorno sólido.

e) Halla la fuerza que el líquido le hace al sólido.

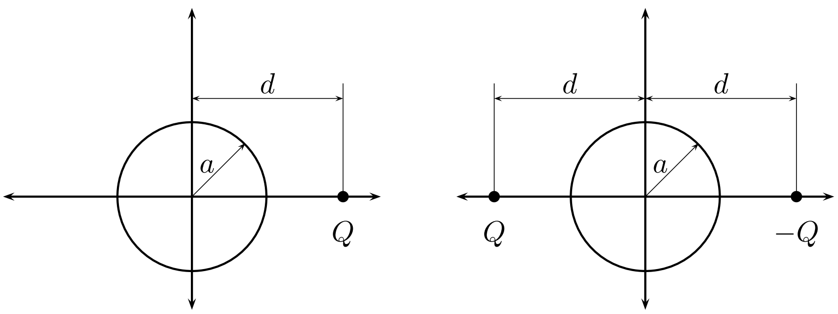

Figura 2: Problema 9

10. La teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales establece que en recintos no simplemente conexos (como es el caso de los flujos bidimensionales con cuerpos finitos en su interior), las soluciones no son únicas. Para especificar una solución, además del comportamiento del flujo sobre las paredes sólidas, es necesario especificar la circulación del campo de velocidades en una curva tal que el sólido se encuentre en su interior. En el marco del modelo que se esta presentando para describir los flujos, esto se puede realizar agregando una singularidad dentro del sólido (un vórtice de magnitud Γ), la cual especifica la circulación del campo (circulación atrapada). Supone un flujo uniforme al infinito que embiste un cilindro fijo el cual tiene una circulación atrapada Γ

    a) Realiza un gráfico cualitativo de las lineas de corriente para valores creciente de Γ.

    b) Confirma los gráficos realizados en base al cálculo exacto de los puntos de estancamiento del fluido.

    c) Calcula la fuerza que el líquido realiza sobre el sólido como función de la circulación atrapada.

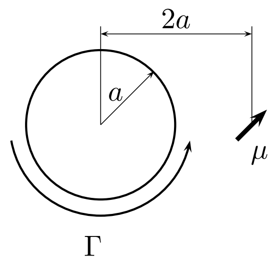

Figura 3: Problema 11

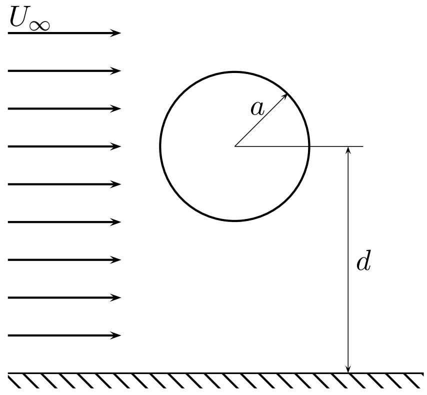

Figura 4: Problema 12

11. En un fluido incompresible, de densidad ρ, se encuentra en reposo un cilindro de radio a; a una distancia de su centro igual a $2a$ se encuentra un dipolo de magnitud μ que forma un ángulo α con la recta que une su centro con el del cilindro. Halla el valor de μ para que la fuerza sobre el cilindro sea nula.

12. Calcula la fuerza que experimenta el cilindro para la configuración mostrada en la figura 4. Haz, las aproximaciones necesarias para no tener que sumar la serie resultante.