Estructura de Materia 1

Curso de Verano 2013

Práctica 6

Inestabilidades hidrodinámicas

Problema 1.

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0, y con un campo de velocidades bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

Problema 2.

Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$, donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 1 \\ y & \text{si } -1 < y < 1 \\ -1 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

Problema 3.

Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un chorro sumergido triangular, dado por $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si } y > 1 \\ 1 - y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

Problema 4.

Considere un fluido compresible isotérmico unidimensional (todas las magnitudes dependen, por ejemplo, solamente de la dirección x), con ecuación de estado

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c_s^2$$

donde c_s es la velocidad del sonido.

(i) Escriba la ecuación de continuidad para este gas.

(ii) Considere el potencial autogravitatorio por unidad de masa Φ tal que

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

con G la constante universal gravitatoria, y escriba la ecuación de Euler para el gas.

(III) Verifique que un estado de reposo del gas con densidad uniforme ρ_0 es solución de las ecuaciones.

(IV) Realice pequeñas perturbaciones sobre este equilibrio, y linealice el sistema resultante. Suponga que la perturbación es una onda plana

$$\delta\rho = \rho_1 e^{i(kx+\omega t)}$$

y halle la relación de dispersión del sistema.

(V) Muestre que si $k^2 c_s^2 < 4\pi G\rho_0$, ω es imaginaria pura y la perturbación inicial de densidad crece exponencialmente (*inestabilidad de Jeans*). El sistema es inestable cuando la fuerza de presión del gas es menor que la fuerza gravitatoria.

Problema 5. Bifurcación tangencial

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(R - R_c) - \frac{(v - U_0)^2}{L}$$

con $\alpha > 0$, $R > R_c$ y v una función solo del tiempo.

(I) Muestre que tiene soluciones estacionarias

$$v = V_\pm = U_0 \pm \left[\alpha L \left(R - R_c\right)\right]^{1/2}.$$

(II) Realice pequeñas perturbaciones alrededor de cada solución

$$v = V_\pm + \delta v$$

y obtenga ecuaciones linealizadas para la perturbación δv en cada caso.

(III) Proponga soluciones para las perturbaciones

$$\delta v = A e^{\sigma t}$$

y muestre que la solución V_+ es estable y que la solución V_- es inestable.

Problema 6. Bifurcación de Pitchfork

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = av - bv^3$$

con $a = \alpha(R - R_c)$, $\alpha > 0$ y $b > 0$.

(I) Halle las soluciones estacionarias de la ecuación.

(II) Realice pequeñas perturbaciones alrededor de cada solución y obtenga ecuaciones diferenciales para la evolución de las perturbaciones.

(III) Estudie la estabilidad de las soluciones estacionarias para $R < R_c$ y para $R > R_c$

Problema 7. Bifurcación de Hopf

Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y + \left(a - x^2 - y^2\right) x \,, \qquad \frac{dy}{dt} = x + \left(a - x^2 - y^2\right) y$$

con $a = \alpha(R - R_c)$ y $\alpha > 0$.

(I) Tomando coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, muestre que son equivalentes al sistema desacoplado

$$\frac{dr}{dt} = r\left(a - r^2\right) \,, \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

(II) Estudie la estabilidad de $r = 0$ para $R < R_c$ y $R > R_c$, y de la órbita con $r = a$ para $R > R_c$.

Problema 8.

Dos elementos de fluido en un flujo turbulento están inicialmente a una distancia λ_1, donde λ_1 es una escala del rango inercial. A partir de análisis dimensional muestre que esta distancia crece como

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\epsilon\lambda)^{1/3} \,,$$

donde ϵ es la tasa de disipación de energía por unidad de tiempo. Deduzca entonces que el tiempo requerido para que la distancia entre los dos elementos de fluido sea λ_2 (con $\lambda_2 \gg \lambda_1$) es $\tau \sim (\lambda_2^2/\epsilon)^{1/3}$.

Problema 9.

A partir de análisis dimensional muestre que para un flujo turbulento en ausencia de fuerzas externas, el balance de energía se reduce a

$$\frac{dE}{dt} \sim -\epsilon.$$

Asumiendo que la energía decae en forma auto-semejante $E(t) \sim E_0 t^{-\alpha}$, y que el fluido está contenido en un recipiente con longitud característica L, muestre que $\alpha = 2$.