# Determinación del potencial complejo w(z)

#### Pablo Cobelli

25 de septiembre de 2014

## 1. Introducción

En este documento consideramos el ejemplo visto en clase de la determinación del potencial complejo w(z) para el caso particular de una fuente de caudal puntual. Me interesa contarles aquí algunos detalles de lo expuesto en clase y dejarles algunos comentarios adicionales que me parecen de interés.

En el marco de lo que vieron en las clases teóricas, las condiciones de flujo plano, incompresible e irrotacional de los flujos nos permiten introducir dos funciones o campos escalares,  $\phi$  v  $\psi$ :

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \nabla \phi, \tag{1}$$

$$\nabla \times u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \nabla \psi \times \hat{\mathbf{k}}. \tag{2}$$

Los campos  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  se denominan potencial de velocidades y función corriente, respectivamente. En la segunda de estas ecuaciones, hemos elegido trabajar en el plano x-y, y el símbolo  $\hat{\mathbf{k}}$  representa entonces el versor en la dirección perpendicular a dicho plano.

Asimismo, es fácil ver que estas funciones satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = +\frac{\partial \psi}{\partial y},\tag{3}$$

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x},\tag{4}$$

y resultan armónicas, i.e.,  $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$  (para ello, basta con reexpresar la incompresibilidad e irrotacionalidad del flujo en términos de  $\phi$  y  $\psi$ ).

## 2. Aclaración acerca de los flujos singulares

A lo largo de esta guía de ejercicios, estaremos considerando algunos flujos que presentan singularidades que corresponden, p.ej., a la presencia de una fuente puntual de caudal constante (como el caso que vamos a analizar aquí) o de un vórtice de circulación dada, o de combinaciones de ellos. En todos estos casos, está sobreentendido que las condiciones establecidas por las ecs. (1-2) sobre la divergencia y el rotor del campo de velocidades son válidas **únicamente en todo punto del plano en que no haya sido introducida una singularidad**.

## 3. Ilustración de la determinación del potencial complejo

Vamos a considerar el caso del flujo producido por una singularidad puntual que emite isótropamente un caudal Q (por unidad de longitud perpendicular al plano). Adoptaremos, por comodidad, un sistema de referencia centrado en la singularidad, y describiremos el flujo en el plano empleando coordenadas cilíndricas. La descripción obtenida será válida en todo punto del plano excepto en la posición de la singularidad.

A partir de la ec. (1) para  $\psi$ , y empleando la expresión para el gradiente en coordenadas cilíndricas, obtenemos

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},\tag{5}$$

$$u_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.\tag{6}$$

Dado que el flujo es isótropo, la magnitud de la velocidad no puede depender de la coodenada angular. Asimismo, la condición de incompresibilidad establece que el flujo debe tener caudal neto igual a Q a través de toda curva cerrada que rodee la singularidad. Esto último implica que la componente radial debe ser distinta de cero. Si consideramos entonces el flujo a través de una curva circular cerrada de radio r centrada en el origen, obtenemos la condición:

$$\oint (u_r \hat{\mathbf{r}}) \cdot ds = \oint (u_r \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} d\theta = \int_0^{2\pi} u_r \, r \, d\theta = 2\pi u_r r = Q,$$

luego la componente radial del campo de velocidades resulta, como esperábamos,

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r}. (7)$$

Con el resultado provisto por la última igualdad, procedemos a integrar la ec. (5), que ahora resulta

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},\tag{8}$$

para obtener

$$\psi(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi}\theta + C(r),\tag{9}$$

donde hemos incluido, como corresponde dado que estamos integrando una ecuación diferencial parcial, una función C(r) de la coordenada radial que resta determinar. Para hacerlo, podemos emplear la condición de armonicidad de  $\psi$ , que en coordenadas cilíndricas resulta:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{10}$$

Observemos que la dependencia de  $\psi$  con  $\theta$  es lineal, con lo cuál el segundo sumando en la última expresión resulta nulo. En consecuencia, obtenemos una condición para la función C(r) en la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right) = 0. \tag{11}$$

Pablo Cobelli 2 / 7

Para que esto suceda debe ser constante el término entre paréntesis, con lo cuál se obtiene fácilmente la función C(r),

$$C(r) = A\log r + B. \tag{12}$$

Sin pérdida de generalidad, la constante B puede tomarse igual a cero (y eso haremos), dado que, en la determinación del flujo, sólo interesan las derivadas de la función corriente.

Hasta este punto, la función corriente resulta

$$\psi(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi}\theta + A\log r,$$

y las componentes del campo de velocidades son (empleando las ecs. (5)-(6))

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r},\tag{13}$$

$$u_{\theta} = -\frac{A}{r}.\tag{14}$$

Todavía falta determinar, sin embargo, el valor de la constante A. Para ello, consideremos la circulación del campo de velocidades a lo largo de una circunferencia centrada en el origen, y llamemos  $\Gamma$  a tal circulación. Como producto de dicho cálculo obtenemos

$$\Gamma = \oint u \cdot dl = \oint (u_{\theta} \,\hat{\theta}) \cdot dl = \oint u_{\theta} \, r \, d\theta = -2\pi A. \tag{15}$$

Entonces la función corriente resulta, finalmente:

$$\psi(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log r. \tag{16}$$

## 4. Análisis y discusión de los resultados

### 4.1. Potencial complejo y campo de velocidades

El potencial complejo,  $w(z) = \phi + i\psi$  se obtiene a partir de la última expresión obtenida en la sección precedente. El cálculo arroja

$$w(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \log z. \tag{17}$$

Cabe destacar que este potencial describe un campo de velocidades asociado a la presencia en el origen de coordenadas de una fuente de caudal constante Q y de un vórtice de circulación  $\Gamma$ . Extender este resultado al caso en que dicho par se encuentre ubicado en otro punto arbitrario del espacio,  $z_0$ , resulta trivial:

$$w(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0). \tag{18}$$

aunque innecesario para los propósitos de este ejercicio en el que nos proponemos analizar el flujo asociado unicamente a dichas singularidades.

Pablo Cobelli 3 / 7

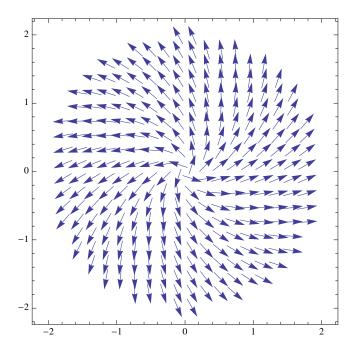


Figura 1: Ejemplo del campo de velocidades para el caso  $Q=2, \Gamma=1$ . Sólo hemos graficado valores de (x,y) tales que  $0.01 < x^2 + y^2 < 4$ , por dos razones. La primera de ellas consiste en evitar la singularidad en el origen. La segunda obedece a la conveniencia de establecer un borde exterior circular, para facilitar la visualización del campo vectorial.

Esta figura fue generada en MATHEMATICA empleando los siguientes comandos:

Luego, el campo de velocidades asociado resulta,

$$u = u_r \,\hat{\mathbf{r}} + u_\theta \,\hat{\theta} = \frac{Q}{2\pi r} \,\hat{\mathbf{r}} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \,\hat{\theta}. \tag{19}$$

Es inmediato reexpresar este campo de velocidades en coordenadas cartesianas, de lo que se obtiene:

$$u_x = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} (Q x - \Gamma y), \qquad (20)$$

$$u_y = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} (\Gamma x + Q y).$$
 (21)

El campo de velocidades para un juego de valores particular Q y  $\Gamma$  se ilustra en la fig. 1. Siendo en este caso  $Q=2>\Gamma=1$ , circulación y caudal neto son comparables en magnitud, y los efectos de ambos se observan claramente en la figura.

Pablo Cobelli 4 / 7

#### 4.2. Líneas de corriente

En el marco del presente formalismo resulta muy sencillo calcular las líneas de corriente, dado que se corresponden con curvas sobre las cuales la función de corriente tiene un valor constante. Esto surge de considerar la variación de  $\psi$  a lo largo de una línea de corriente,

$$\nabla \psi \cdot u = u_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \tag{22}$$

donde la última igualdad surge de las ecs. (3)-(4). La función de corriente  $\psi$  es entonces constante sobre las líneas de corriente, por lo que la expresión

$$\psi(x) = K,\tag{23}$$

siendo K una constante, es la ecuación de las líneas de corriente.

En el caso particular que estamos analizando, las líneas de corriente del flujo son aquellas curvas en el plano dadas por

$$r(\theta) = \exp\left[\frac{2\pi}{\Gamma} \left(\frac{Q}{2\pi}\theta - K\right)\right],$$
 (24)

para un valor de K dado. Esto significa que la ec. (24) representa en realidad una familia de curvas (las líneas de corriente) parametrizada por el valor de la función corriente sobre cada una de ellas, valor que hemos llamado K. En virtud de la estacionariedad del flujo, sabemos además que estas curvas coinciden con las trayectorias de las partículas de fluido y las líneas de trazas.

Geométricamente, la ec. (24) nos indica que las líneas de corriente son espirales logarítmicas (cuya forma es idéntica, e.g., a la de una sección de un caracol); la fig. 2 muestra una de dichas líneas para valores particulares de Q,  $\Gamma$  y K. Complementariamente, la fig. 3 nos muestra, con una imagen satelital, un ejemplo de este tipo de espiral observada en la atmósfera terrestre.

En el caso general, vemos que el requerimiento de que una fuente puntual emita un caudal Q constante nos arroja un flujo que —al menos en principio— podría presentar una circulación no nula. Es decir: obtuvimos como resultado de nuestro análisis que una circulación no nula es compatible con un flujo originado por una fuente puntual cuyo caudal es constante.

Los dos casos límite que surgen de nuestros resultados son los siguientes:

1.  $\Gamma=0$ , el flujo resultante es el correspondiente a una **fuente isótropa** de caudal Q constante que emite en forma radial. En ese caso la función corriente y el potencial complejo resultan

$$\psi_{\text{fuente}} = \frac{Q}{2\pi}\theta,$$
(25)

$$w_{\text{fuente}}(z) = \frac{Q}{2\pi} \log z.$$
 (26)

Pablo Cobelli 5 / 7

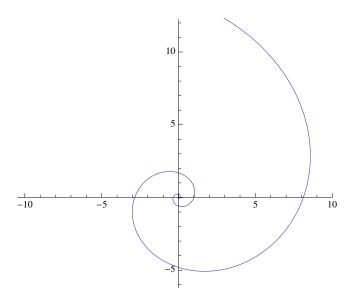


Figura 2: Ejemplo de una línea de corriente del flujo para el caso  $Q=1, \Gamma=3$  y K=0.

La figura fue generada en Mathematica empleando los siguientes comandos:

Q = 0, caso en el cuál el flujo corresponde al de un vórtice libre e isótropo de circulación Γ. La función corriente y el potencial complejo resultan en este caso

$$\psi_{\text{v\'ortice}} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r, \tag{27}$$

$$\psi_{\text{v\'ortice}} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r, \qquad (27)$$

$$w_{\text{v\'ortice}}(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \log z. \qquad (28)$$

#### **5**. Sumario

En este problema pudimos calcular la función de corriente, las líneas de corriente (y graficarlas) así como también obtener una expresión para el potencial complejo de una fuente de caudal constante Q.

Este caso es de interés por dos razones. Por un lado, el ejemplo sirve como ilustración del método general para el cálculo del potencial complejo de un flujo singular. Por el otro, vemos que hemos calculado, en un solo ejemplo, el potencial complejo para los dos 'ladrillos fundamentales' de los que estarán constituídos todos los flujos que consideraremos en esta práctica: una fuente isótropa y un vórtice (los dos casos límite descriptos en la sección precedente). Cualquier flujo que resulte combinación de ellos (p.ej., dipolos, pero también cualquier otra distribución de fuentes, sumideros y/o vórtices), podrá calcularse fácilmente a partir del resultado que obtuvimos, dado que las ecuaciones para  $\phi$ y  $\psi$  responden al principio de superposición.

Pablo Cobelli 6 / 7



Figura 3: Imagen satelital que muestra una depresión centrada en el estrecho de Dinamarca entre Islandia y Groenlandia. Los vientos, atraídos por la zona de baja presión en el centro, se curvan por el efecto de la fuerza de Coriolis, y observamos la espiral con la apariencia de caracol desde el espacio. La imagen fue tomada por el instrumento Aqua MODIS (NASA), el 4 de septiembre de 2003. Para visualizar una versión de alta resolución de esta imagen, visitar: http://visibleearth.nasa.gov/view\_rec.php?id=6204.

Pablo Cobelli 7 / 7