

## Estructura de la Materia I

### Práctica 2 Ecuación Indefinida - Ecuación de Euler - Hidrostática

**2.1 Notación:** Para los siguientes problemas, considere la ecuación indefinida en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x = \rho a_x$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_y = \rho a_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho a_z$$

donde  $\sigma$  es el campo tensorial de esfuerzos del medio continuo,  $a$  el campo de aceleraciones,  $f$  el campo de fuerzas externas por unidad de masa y  $\rho$  la densidad de masa del medio. Entonces:

Considere que el medio continuo en cuestión es un sólido de densidad uniforme  $\rho_0$  en forma de paralelepípedo, de manera que un punto cualquiera del mismo se designa por  $(X, Y, Z)$ , con  $0 \leq X \leq a$ ,  $0 \leq Y \leq b$ , y  $0 \leq Z \leq c$ .

El cuerpo se traslada en la dirección  $z$ , de manera que cada punto del cuerpo tiene coordenadas:  $x = X$ ,  $y = Y$ ,  $z = Z + \alpha(t)$ .

El campo de fuerzas externas es el de la gravedad  $f = (0, 0, g)$  y existen también fuerzas aplicadas sobre las caras  $Z=0$  y  $Z=c$ , dadas respectivamente por  $(0, 0, F_0(t))$  y  $(0, 0, F_c(t))$  que son uniformes sobre las caras correspondientes; no hay fuerzas aplicadas en las caras  $X=0$ ,  $X=a$ ,  $Y=0$ ,  $Y=b$ .

Usando las condiciones sobre las caras laterales, muestre que en todo punto del cuerpo es:  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ,

y que la ecuación de movimiento es:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} = \rho_0(\ddot{\alpha} - g)$$

Resuelva y determine la ecuación para  $\alpha(t)$ . Se obtiene lo esperado?

**2.2** Demuestre, por la conservación del momento angular, que en ausencia de cuplas de volumen el tensor de esfuerzos debe ser simétrico, esto es  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ .

**2.3** Muestre que para un fluido en reposo sobre el cual actúan fuerzas de volumen conservativas, la ecuación indefinida se reduce a:

a) si el fluido es incompresible:

$$\frac{p}{\rho} + \Phi = cte$$

b) si el fluido no intercambia calor con el medio externo:

$$H + \Phi = cte$$

c) si el fluido se mantiene a temperatura constante:

$$G + \Phi = cte$$

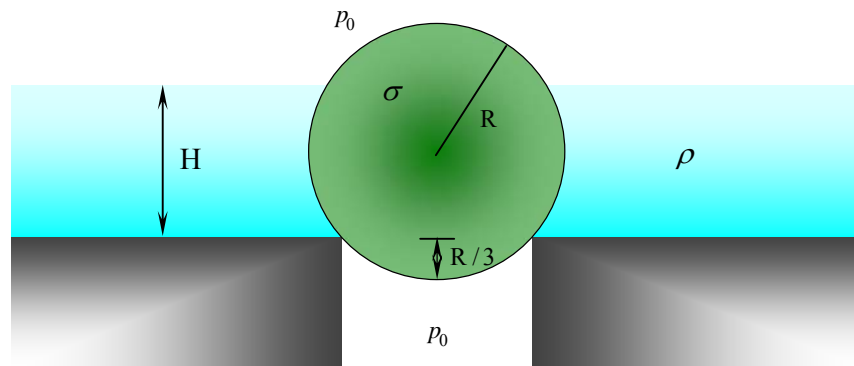
donde  $\Phi$  es el potencial por unidad de masa del cual se derivan las fuerzas de volumen que actúan sobre el fluido (INCLUIDAS LAS INERCIALES),  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad,  $H$  la entalpía y  $G$  la función de Gibbs, ambas últimas por unidad de masa del fluido.

#### **2.4** TAQUÍMETRO HIDROSTÁTICO

Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio  $R$  y altura  $2H$ , inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme  $\Omega$ .

- a) cuál es la forma de la superficie libre del líquido?
- b) para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?
- c) para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si  $R=5$  cm,  $H=7.5$  cm,  $g= 10$  m/seg<sup>2</sup> ?. Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.
- d) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en c) y  $\nu=90$  vueltas/minuto, grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:
  - i) en reposo
  - ii) durante la rotación
- e) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

**2.5** Una esfera sólida de densidad  $\sigma$  uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad  $\rho$ , en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura  $H$  desde el fondo de la pileta.



Analizar bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe.

Para ello:

- Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de H (no ponga limitaciones sobre este parámetro ya que el líquido puede o no tapar totalmente a la esfera. Tener en cuenta ambas posibilidades)
- Grafique el empuje como función de H e interprete cualitativamente.
- Si  $\sigma = \alpha \rho$ , verifique que el valor mínimo de  $\alpha$  para el cual se obtiene obturación para todo H es:  $\alpha = 8/27$ .

**2.6** Un fluido perfecto se caracteriza por la siguiente relación constitutiva:

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T) \delta_{ij}$$

- Muestre que en tal caso, la ecuación de movimiento se escribe:

$$-\frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho - \frac{\partial p}{\partial T} \nabla T + \rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{a}$$

- El comportamiento del agua a una dada temperatura, se modela bien por la relación  $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$ , donde  $\rho_0$  es la densidad en ausencia de presión y  $K$  una constante.

Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción del campo de fuerza externa  $\mathbf{f} = (0, 0, g)$ , determine la distribución de presión y de densidad del agua sabiendo que en  $Z = 0$  es  $\rho = \rho_0$ .

- Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ( $K \rightarrow \infty$ ). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ( $K = 2.10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) (desprecie la presión en la superficie).

- d) Considere nuevamente un fluido ideal, pero esta vez un gas ideal, con ecuación de estado:  $p = R\rho T / m$ , con  $R$  la constante universal de los gases y  $m$  la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas externas  $f = (0, 0, -g)$ , la presión a una altura  $z$  está dada por:

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{mg}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right\}$$

- d) Muestre que si  $T$  depende de  $x, y, z$ , no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

## 2.7 MODELO SIMPLIFICADO DE LA ATMÓSFERA TERRESTRE

Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura  $z$  sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores  $p_0$ ,  $\rho_0$  y  $T_0$ , respectivamente.

Suponga que la Tierra es plana, la gravedad constante y la atmósfera está en reposo, y también que el aire es un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan a través de:  $p\rho^{-\gamma} = cte$ . (cuantifique  $p$  para  $\gamma = 7/5$ , atmósfera adiabática, y  $\gamma = 1$ , atmósfera isotérmica).

- 2.8 Un cilindro similar al del problema 2.4, contiene una masa  $M$  de gas ideal a temperatura constante. Hallar la distribución de la densidad de esta masa de gas  $\rho(r, z)$ .
- 2.9 Obtener una expresión para la distribución de presión de una estrella esférica autogravitante\* en los casos:
- a)  $\rho = cte$ .

---

\* (pág. 19, libro de G. K. Batchelor, An Intr. to Fluid Dynamics)

En este caso verifique que la estrella tiene un radio finito (cuál es la condición para ello?)

b)  $p = C \rho^{6/5}$  .

Observe que en esta situación la estrella se extiende indefinidamente, pero su masa es finita.

c)  $\rho = \rho_c(1 - \beta r^2)$  .

Calcule la presión en el centro y muestre que si la densidad media es el doble de la densidad en la superficie, la presión en el centro es mayor por un factor 13/8 de la que se obtendría suponiendo que la estrella tuviera densidad uniforme con la misma masa total y el mismo radio.

El potencial autogravitatorio verifica:  $\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho$ , con  $G$  la constante de gravitación, de modo que si:  $-\rho \nabla \Psi = \nabla p$ , entonces:  $\nabla \cdot (\nabla p / \rho) = -4\pi G \rho$  es la ecuación a resolver.