Estructura de la Materia I

Práctica 4 ~ Fluidos Ideales Incompresibles

4.1 a) Flujos de singularidades elementales

Los siguientes fluidos incompresibles e ideales, fluyen de tal manera que su movimiento puede ser considerado bidimensional (2D), es decir que existe simetría de traslación según, digamos, el eje $\hat{z}$. Determine:

a) el campo de velocidades $\boldsymbol{u}(x,y)$.

b) el rotor $\boldsymbol{w}(x,y)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$.

c) la función de corriente $\psi(x,y)$ y el gráfico de las líneas de corriente,

cuando el flujo está generado por:

i) una corriente uniforme al infinito, de velocidad constante en módulo U_∞ que forma un ángulo α con el eje $\hat{x}$.

ii) una distribución lineal de fuentes o sumideros de caudal $\pm Q$, respectivamente.

iii) un filete vorticoso o vórtice de circulación Γ.

iv) un dipolo formado por una fuente y un sumidero de idéntico caudal (en módulo).

v) un dipolo formado por dos vórtices de circulación Γ iguales (en módulo) y opuestas.

b) Flujos no singulares al finito

Para las siguientes funciones de corriente $\psi(x,y)$, calcule:

a) el campo de velocidades $\boldsymbol{u}(x,y)$

b) los puntos de estancamiento (aquellos puntos (x,y) del plano en donde $\boldsymbol{u}(x,y)=\boldsymbol{0}$)

c) el rotor $\boldsymbol{w}(x,y)$

d) graficar las líneas de corriente

i) $\psi(x,y)=a\,y$ $\qquad a,b,c,d$ constantes.

ii) $\psi(x,y)=b\,y^2$

iii) $\psi(x,y)=c\,x\,y$

iv) $\psi(x,y)=d\,(3x^2y-y^3)$

4.2 Flujo alrededor de un semicuerpo bidimensional

Considere el flujo que se obtiene como superposición del flujo producido por una corriente uniforme al infinito y una fuente puntual de caudal Q.

Hallar la función de corriente y los puntos de estancamiento. Graficar.

Tenga en cuenta que cualquier paquete de software que permite graficar en 3D, posee alguna rutina o comando que calcula líneas de contorno o ContourLines. Ésa es justamente una representación de curvas de nivel, que para el caso considerado, da una visualización de las líneas de corriente (l. c.), conocida $\psi(x,y)$. Sin embargo, el soft lo único que hace es hacer más rápido lo que se puede hacer a mano (pla).

Para ello, paralelamente al lado mayor de una hoja, trazar líneas paralalelas con un espaciado de 0.5 cm, que representan las l.c. de la corriente uniforme. Numerando las líneas, eligiendo de manera arbitraria el salto entre ellas, se está fijando el valor del módulo de la velocidad del flujo uniforme.
Cerca del medio de la hoja se elige un origen, a través del cual se trazan las l. c. radiales que corresponden a la fuente puntual, con incrementos de (por ej.) 15º. Se numeran estas líneas eligiendo arbitrariamente el salto entre ellas, lo cual fija el caudal Q de la fuente. Finalmente, si se unen todas las intersecciones entre líneas de corriente cuya suma sea constante, se obtienen las l. c. del flujo total. (porqué vale esta suma, así?). De esas cuantas l. c., la que determina el semicuerpo es la que contiene al punto de estancamiento (donde convergen cuatro). Y listo.

4.3 Potencial Complejo

El movimiento de un fluido incompresible e irrotacional con simetría de traslación según el eje $\hat{z}$ (problemas 2D), puede ser estudiado bajo el formalismo del potencial complejo.

La hipótesis de incompresibilidad conduce a la existencia de un potencial vector que en el caso 2D tiene sólo componente $\hat{z}$, esto es $\boldsymbol{A}=\psi(x,y)\,\hat{z}$. Éste da la relación entre el campo de velocidades $\boldsymbol{u}(x,y)$ y la función de corriente $\psi(x,y)$:

a) verifique que se cumple:

$\boldsymbol{\nabla}.\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\times\psi\,\hat{k})=0$, y que por lo tanto:

$\boldsymbol{u}(x, y) = \boldsymbol{\nabla}\psi \times \hat{k}$, con $\hat{k}$ el versor en la dirección $\hat{z}$.

La condición de irrotacionalidad da la existencia de una función escalar, el potencial de velocidades $\phi(x, y)$, tal que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$.

b) verifique que las funciones $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son armónicas y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Resulta inmediato utilizar un formalismo en el plano complejo, introduciendo el Potencial Complejo $W(z) = \phi(x, y) + i\,\psi(x, y)$, con $z = x + i\,y$.

Explícitamente verifique que:

c) $$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = -i\,\frac{\partial W}{\partial y}$$

y si se define una velocidad compleja $\tilde{u} = u_x + i\,u_y$, entonces:

d) $$\frac{dW}{dz} = \tilde{u}^*,$$

donde el asterisco indica complejo conjugado.

4.4 Calcular el potencial complejo de las configuraciones del problema 4.**1**

4.5 Flujos producidos por singularidades en presencia de contornos sólidos. Para las siguientes configuraciones de fluidos incompresibles e irrotacionales, calcular el potencial complejo $W(z) = \phi(x, y) + i\,\psi(x, y)$, el potencial de velocidades $\phi(x, y)$, la función de corriente $\psi(x, y)$, el campo de velocidades y los puntos de estancamiento.

a) una fuente (sumidero) de caudal *Q* (-*Q*) ubicada a una distancia *d* de un plano infinito.

b) Idem a) pero a una distancia $\sqrt{2}\,d$ de la intersección de dos planos semi-infinitos que forman un ángulo $\frac{\pi}{2}$ entre ellos.

c) Idem a), entre dos planos infinitos paralelos a la misma distancia d de cada uno de ellos.

d) un vórtice de circulación Γ (positiva) a distancia d, de un plano infinito.

e) un dipolo de intensidad μ_{Q_0} y ángulo α respecto al eje real ($\hat{x}$) a distancia d de un plano infinito. En particular hágalo para $\alpha = \pi$ (el dipolo apunta hacia el plano).

f) un dipolo de intensidad $\mu_{\Gamma 0}$ y ángulo α, a distancia d de un plano infinito.

Grafique cualitativamente las líneas de corriente.

4.6 Flujo alrededor de un cilindro

La superposición del flujo producido por un dipolo de intensidad μ_{Q_0} ($\alpha = \pi$) enfrentado a un flujo uniforme al infinito, de velocidad $U_\infty \hat{x}$, genera un flujo que modela exactamente el flujo externo de una corriente uniforme al infinito en presencia de un cilindro sólido.

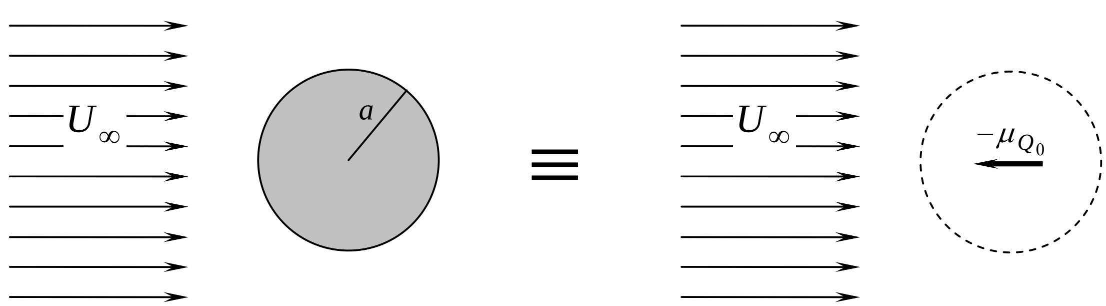
a) Calcule el potencial complejo $W(z)$ de la configuración.

b) Aplicando el teorema del círculo al problema del flujo uniforme frente al cilindro de radio a, encuentre cuál debe ser el módulo de la intensidad del dipolo imagen y su dirección para que el contorno $|z| = a$ del cilindro, sea una línea de corriente.

c) Dónde se encuentran los puntos de estancamiento?

d) Encuentre una expresión para la presión sobre el cilindro, como función del ángulo.

e) Cuál es la fuerza que el fluido le ejerce al cilindro?



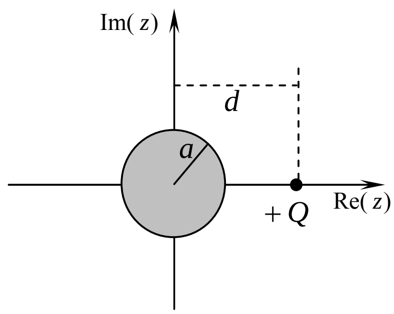
4.7 Para las configuraciones de sólidos y singularidades con simetría de traslación en fluidos ideales , incompresibles e irrotacionales, que se muestran en las figuras:

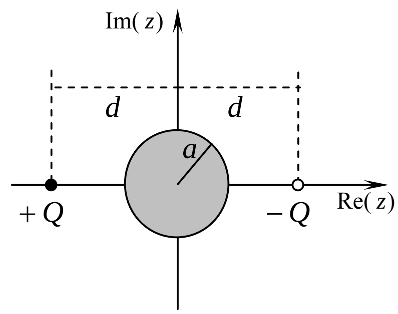
a) Haga un diagrama cualitativo de la líneas de corriente.

b) Escriba el potencial complejo.

c) Halle los puntos de estancamiento.

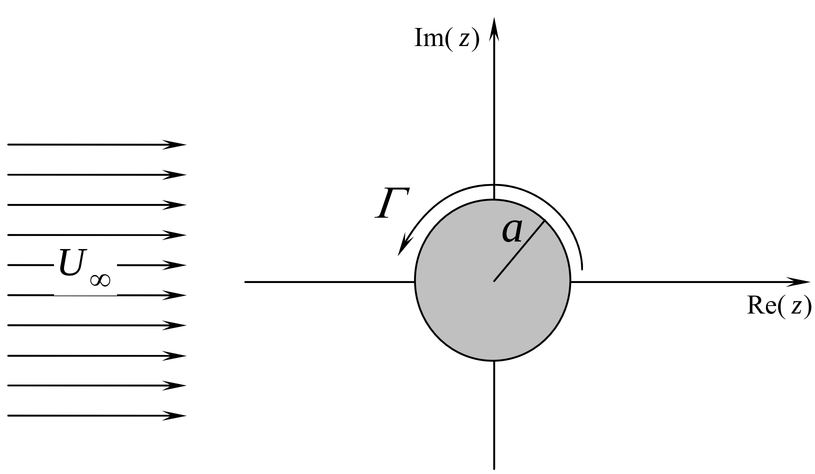
d) Grafique la presión como función de la posición, para puntos del contorno sólido.



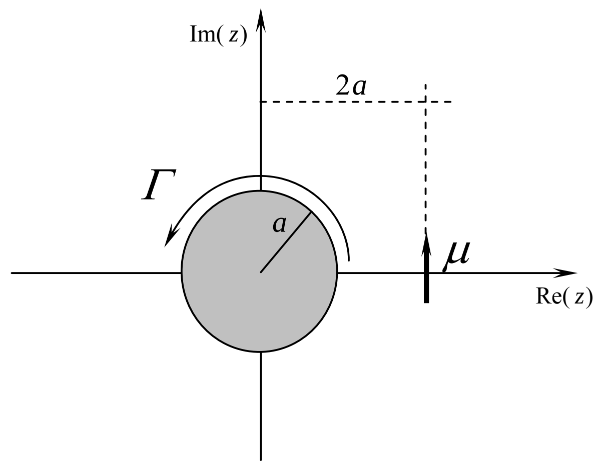


4.8 Problema de Magnus

(Aquí Γ es una circulación atrapada. El efecto de esta circulación en el flujo, es el de simular un campo de velocidades azimutal (en $\hat{\varphi}$) que dada la naturaleza no viscosa del fluido ideal no puede ser generado de otra forma. Es un vórtice centrado en el origen, con la particularidad de que ante la aplicación del teorema del círculo no genera una imagen. Por lo tanto su efecto se considera simplemente agregando al potencial complejo de las singularidades y sus imágenes (dadas por el teo. del círculo) el potencial complejo correspondiente al de un vórtice centrado en el origen sin la aplicación del citado teorema)



4.9 Se tiene un cilindro infinito de radio a con circulación atrapada Γ, inmerso en un fluido incompresible e irrotacional de densidad ρ. A una distancia $2a$ se encuentra un dipolo de intensidad μ_0, orientado según se muestra en el siguiente gráfico. Hallar el valor de μ_0 para que la fuerza sobre el cilindro sea nula.



4.10 Calcular la fuerza que el fluido le hace al sólido para el problema 4.**6**

4.11 Calcular la fuerza que sufre el cilindro para la siguiente configuración mostrada en la figura. Para ello elija la aproximación a orden más bajo en el potencial complejo que da una fuerza distinta de cero. Dónde están los puntos de estancamiento?