Estructura de la Materia I

Práctica 6 ~ Fluidos Viscosos

A) Flujos en régimen estacionario

6.1 Considere el caso d el flujo estacionario de un fluido viscoso de alta simetría con viscosidad dinámica μ y densidad ρ constantes, cuyo campo de velocidades $\boldsymbol{u}$ es una función de la coordenada transversal al movimiento. Para fijar ideas, sea $\boldsymbol{u} = u_x(y)\,\hat{x}$, y no depende de la coordenada *z*, debido a la simetría en esa dirección.

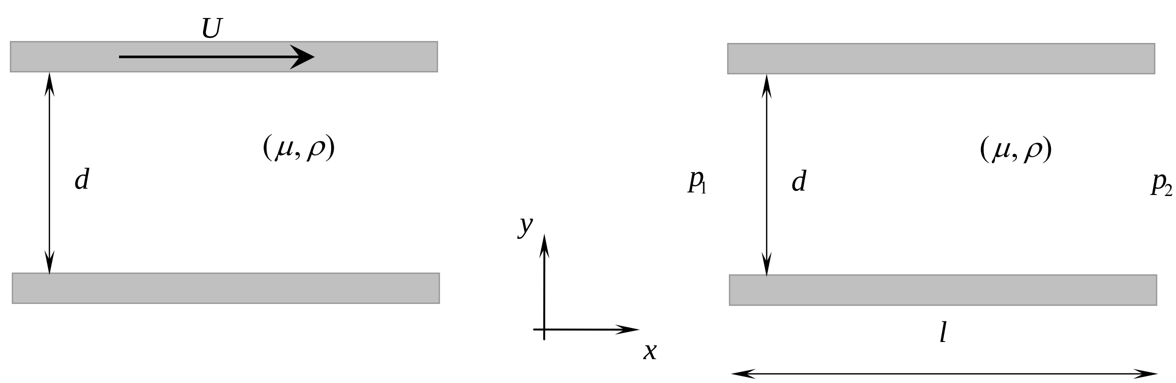
a) Demuestre que en estas condiciones el término convectivo $(\boldsymbol{u}\,.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} \equiv 0$.

b) Encuentre el campo de velocidades cuando el f luido es "movido" por las siguientes condiciones de contorno:

simetría cartesiana:

i) dos planos infinitos separados una distancia *d* limitan el movimiento del fluido, el plano inferior en reposo y el su perior se desplaza con una velocidad *U* constante, en la dirección *x*.

ii) idem i) pero ahora el movimiento se establece por la existencia de un gradiente de presiones constante e igual a $\Delta p / l$, siendo *l* una distancia típica de variación de las presiones p_1 y p_2 medidas como indica la figura.



simetría cilíndrica:

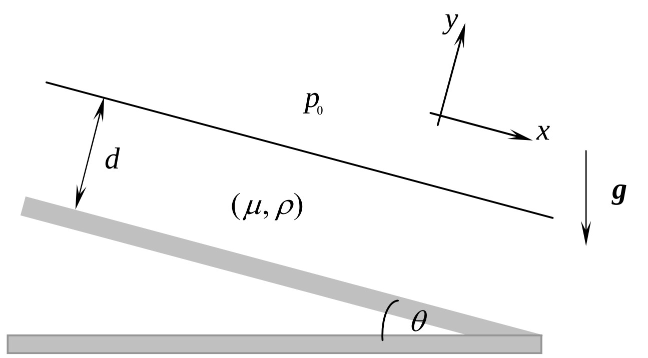
iii) (Flujo de Poiseuille) el fluido se desplaza en el interior de un conducto perfectamente cilíndrico de radio a, siendo su movimiento establecido por el mismo gradiente de presiones constante como en ii).

c) para todos los casos considerados calcule el esfuerzo viscoso sobre el contorno sólido.

Utilice las expresiones apropiadas dadas en la fotocopia anexa .

6.2 Una capa de líquido muy viscoso fluye bajo la acción de la gravedad sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.

a) Suponiendo que el espesor de la capa de fluido *d* es uniforme y que el fenómeno es estacionario, halle la velocidad del líquido como función de la distancia normal al plano
b) Determine la relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima.
c) Calcule el caudal másico por unidad de ancho del plano.

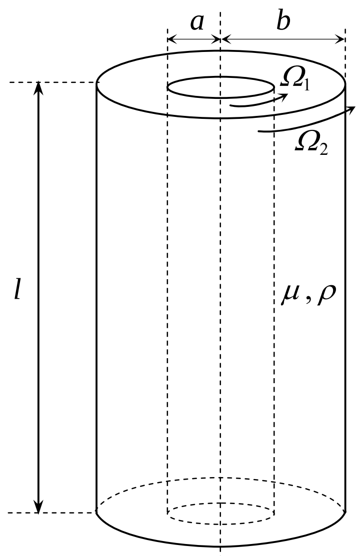


6.3 Resuelva como en el problema **6.1** pero ahora considerando el caso en que dos fluidos de densidades y viscosidades dinámicas μ_1, μ_2 y ρ_1, ρ_2 respectivamente, se encuentran uno por encima del otro.

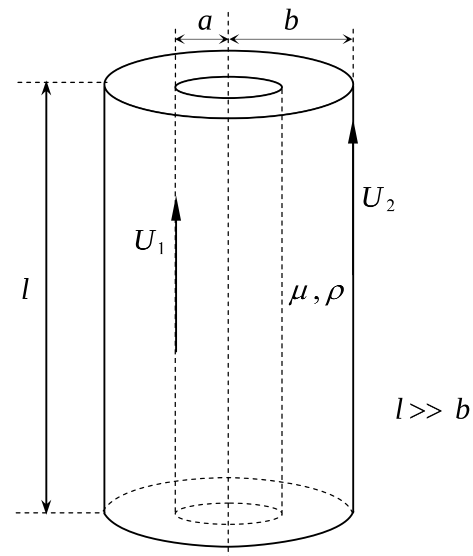
6.4 a) Para las configuraciones de líquidos viscosos (μ,ρ) que se indican a continuación, halle una solución laminar y estacionaria para el campo de velocidades.

b) Para cada configuración realice el análisis dimensional de la magnitud que se indica y compruébelo luego por cálculo analítico.

i)

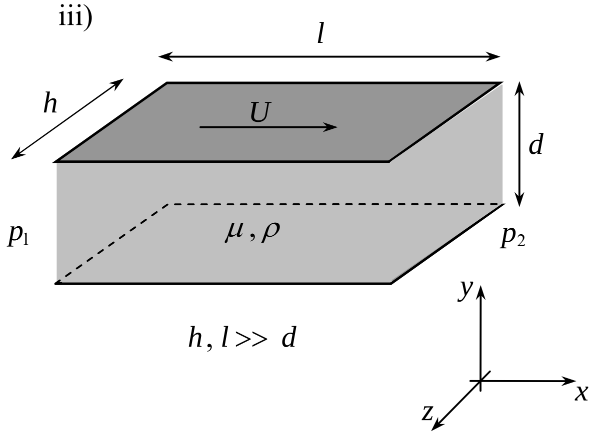


ii)

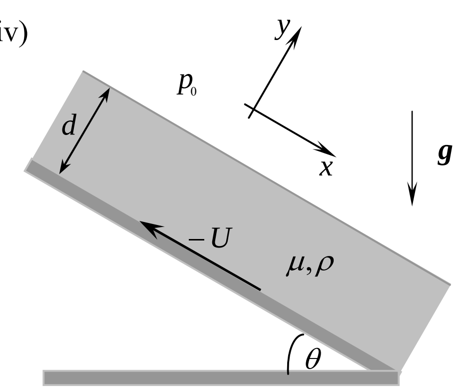


$N_{1,2}$: cupla que realiza cada cilindro y Q: caudal.

iii)



iv)



y_0: la ubicación del punto de velocidad máxima, σ: la fuerza que realiza el plano por unidad de área.

6.5 Mediante el análisis dimensional, demuestre que la cantidad de masa de fluido que pasa por unidad de tiempo (el caudal Q, llamado descarga) a través de un conducto de sección circular como en el flujo de Poiseuille, depende de la potencia cuarta del radio del conducto. Además, vea que es proporcional al gradiente de presiones entre los extremos del tubo e inversamente proporcional a la viscosidad cinemática, y la constante de proporcionalidad es justamente $\pi/8$.

6.6 Considere el movimiento estacionario de una esfera sólida de masa m y de diámetro D en el seno de un líquido viscoso en reposo de parámetros (μ,ρ). La esfera se mueve con velocidad constante $-u$ en la dirección $\hat{x}$ y para que el movimiento pueda ser considerado estacionario debe describirse desde un sistema inercial fijo a la esfera; desde allí, el fluido se desplaza con velocidad u. Imagínese que el fluido "arrastra" a la esfera y es ésa fuerza de arrastre ("Drag") la que se quiere analizar.

a) Estime mediante al análisis dimensional la forma funcional de la fuerza que el fluido ejerce a la esfera, en los casos de velocidades "muy bajas" o "muy altas", es decir, cuando el número de Reynolds $R = \dfrac{U\,l}{\nu}$ es muy pequeño, R<<1 o en el otro límite, muy grande, R>>1. (aquí U es una velocidad característica del problema, cuál? mientras que l representa una escala característica de longitudes (será D?) y $\nu = \mu/\rho$, es la viscosidad cinemática.

b) con lo obtenido en a) encuentre ahora las expresiones correspondientes a la velocidad límite que alcanza la esfera cayendo bajo la acción de la gravedad en el seno del fluido.

Observe que la fuerza obtenida en el inciso a) no depende únicamente del número de Reynolds, ya que la gravedad es importante en este caso, entonces el otro número adimensional que interviene en la fuerza es el número de Froude $F = \dfrac{U^2}{l\,g}$.

c) Considere por un momento el caso de un flujo no estacionario en donde además de los parámetros y variables como en el inciso a) (esto es U, l, ν, es decir R) interviene un tiempo característico τ, que determina la tasa de variación del flujo, que podría ser, por ejemplo, el período de una oscilación que realice el cuerpo. Entonces vea que las dos cantidades adimensionales que pueden formarse son: el número de Reynolds y el de Strouhal $S = \frac{U\tau}{l}$.

B) Flujos en regimen no estacionario

Cuando en un problema particular no se está interesado en la forma o manera de generación de un flujo a tiempos cortos, determinado en general por las condiciones iniciales, uno tiende a pensar que existirá un dominio temporal para el cual se alcance un régimen estacionario. (es claro que a menos de considerar turbulencia ni la generación de inestabilidades).

Sin embargo, existen regímenes dependientes del tiempo (luego de un transitorio) que se alcanzan cuando se prescinde de ciertos detalles de las condiciones de contorno y/o iniciales y otros que se establecen de manera a partir de condiciones iniciales de tipo "permanente". Los primeros son los flujos autosemejantes o autosimilares, los otros son los "flujos oscilantes" que en la jerga son llamados flujos oscilantes en régimen permanente.

B1) Flujos en régimen autosemejante o autosimilar.

6.7 Existen algunos problemas en donde la dependencia funcional del campo de velocidades con las coordenadas espaciales y el tiempo puede asimilarse en una única variable, que es una combinación de potencias, en el sentido dimensional, del espacio y del tiempo. Ello sucede cuando además del conjunto de parámetros y variables establecidos en la ecuación de evolución, las condiciones de contorno involucran sólo un único parámetro con dimensiones independientes de las del espacio y del tiempo.

En estos casos se dice que la solución es autosemejante o autosimilar, es decir semejante a sí misma, puesto que un simple reescalado de las coordenadas espaciales y del tiempo, da la misma forma funcional.

Como introducción al tema, estudie el caso de la difusión de una vorticidad infinita que se genera en la superficie de contacto entre un fluido viscoso (μ, ρ) y un plano infinito.

a) para ello suponga un problema de alta simetría en donde el campo de velocidades será sólo función de una coordenada espacial, la coordenada vertical (digamos "y") y del tiempo.

El fluido se encuentra en reposo apoyado sobre un plano infinito y ocupa el semiplano $0<y<\infty$. A $t=0$ el plano es puesto súbitamente en movimiento con velocidad constante *U*, en la dirección $\hat{x}$. Realice el análisis dimensional para poner de manifiesto la característica autosemejante de la solución del problema y encuentre el campo de velocidades como función del tiempo.

b) Haga un gráfico cualitativo del campo de velocidades para tiempos próximos al momento (luego) del arranque y otro para tiempos lejanos.
c) Calcule la vorticidad.
d) El arranque inmediato del plano genera una lámina de vorticidad infinita en y=0 que difunde en el tiempo por acción de la viscosidad hacia el interior del fluido. Estime el tiempo que le toma a la vorticidad difundir una distancia *L*. (pág. 35-38, *Elementary Fluid Dynamics*, Acheson, D.J., Oxford University Press, 1993) (puede consultarse en el Lab. de Física del Plasma)

6.8 Estudio del caso de la difusión de un vórtice.

A $t=0$, un vórtice de intensidad Γ_0 es puesto en el seno de un fluido viscoso (μ,ρ), digamos en el origen de coordenadas. Éste genera un campo de velocidades, dada la alta simetría, que es azimutal y depende sólo de la coordenada radial. Así, siempre a $t=0$, la vorticidad es infinita en el origen $r=0$ y nula para $r>0$.

Debido a la viscosidad, el fluido no puede mantener en el tiempo este flujo y como en el problema anterior se produce una difusión de la vorticidad.

a) Estudie este proceso para t>0, en términos de la circulación $\Gamma(r,t)=2\pi r u_\theta(r,t)$ como variable dependiente del problema. Haga un análisis dimensional para poner de manifiesto el tipo de solución autosemejante.
b) Obtenga el campo de velocidades. Vea que a distancias r desde el eje que satisfacen $r<<\sqrt{4\nu t}$, el flujo ya no es más irrotacional, sino que aproximadamente viene

dado por: $u_\theta \cong \dfrac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} r$, el cual corresponde a un movimiento de rotación "casi" uniforme con velocidad angular $\Omega = \Gamma_0 / 8\pi\nu t$.

B2) Flujos oscilantes en régimen permanente

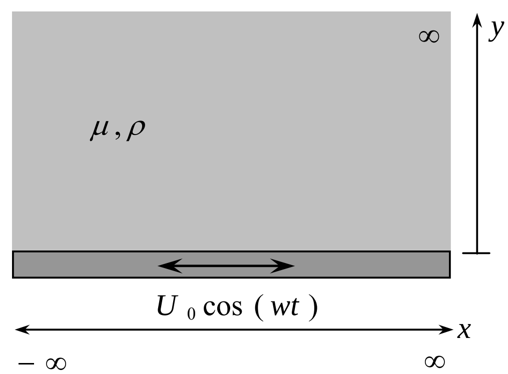
6.9 En la configuración de alta simetría que se indica, el líquido ha alcanzado un régimen oscilante, es decir que el campo de velocidades se escribe como:

$$\boldsymbol{u}(y,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\boldsymbol{u}}(y) e^{iwt}\}$$ (observe que la solución es separable)

a) Hallar el campo de velocidades que satisface las condiciones de contorno.

b) A partir del análisis dimensional, determine la relación funcional entre la magnitud pedida y los datos del problema.

c) Haga un gráfico cualitativo del campo de velocidades.



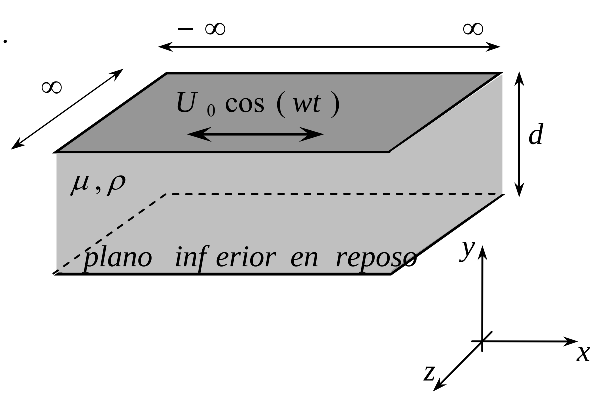
δ : la longitud de penetración.

6.10 Un fluido (μ, ρ) muy viscoso se encuentra entre dos planos de dimensiones infinitas.

El plano inferior está quieto mientras que el superior, a una distancia *d*, se mueve con un movimiento armónico de velocidad $U_0 \cos(wt)$.

a) hallar el campo de velocidades
b) analice los casos $\delta << d$ y $\delta >> d$.

(recuerde que δ es la longitud de penetración)

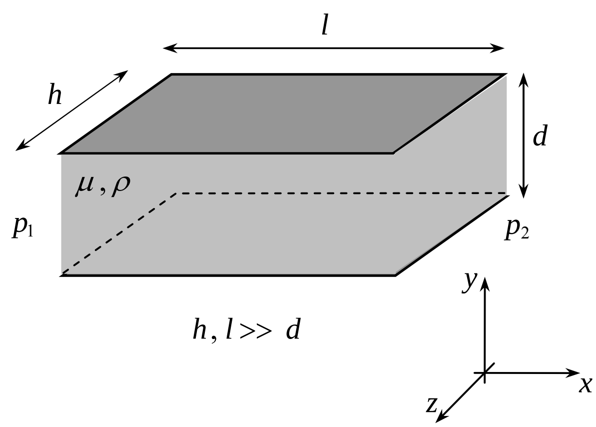


c) haga un gráfico cualitativo del campo de

velocidades para las dos situaciones señaladas.

6.11 Ahora resuelva el caso de un líquido (μ, ρ) entre dos planos de dimensiones infinitas, los dos en reposo, que es "movido" por un gradiente de presiones armónicamente oscilante en el tiempo, del tipo $\Delta p(t) = p_1 - p_2 = b\cos(wt)$.

Utilice el análisis dimensional para obtener la dependencia funcional del caudal medio <*Q*>, que se establece a través de una sección transversal al movimiento.

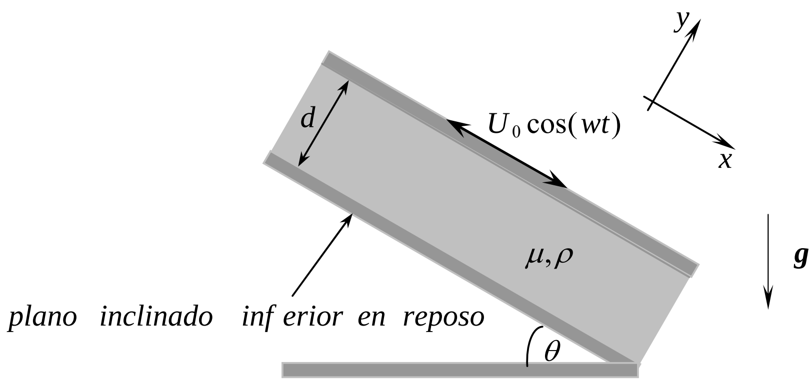


$$\Delta p(t) = p_1 - p_2 = b\cos(wt)$$

6.12 En algunas situaciones el movimiento resultante del fluido se debe al efecto combinado de un campo de fuerzas externas como la gravedad y al movimiento puramente producido por condiciones de contorno oscilantes.

Para la situación descripta en la figura siguiente:

a) demuestre que el campo de velocidades puede ser calculado a partir de la superposición del campo de velocidades de un problema estacionario más uno dependiente del tiempo. Cuáles son las razones para poder hacerlo? (no sólo importa la linealidad de las ecuaciones de evolución!)
b) Mediante el análisis dimensional estime la dependencia funcional de la potencia media entregada por el plano superior al fluido.



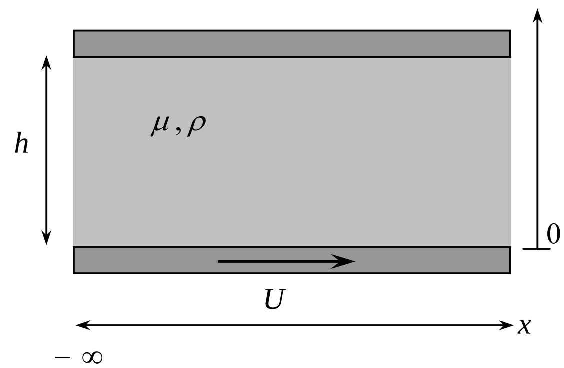
6.13 Idem problema **6.11**, pero ahora el gradiente de presiones tiene una dependencia temporal oscilante del tipo $\Delta p(t) = p_1 - p_2 = a + b\cos(wt)$.

B3) Estudio del transitorio de un flujo y convergencia a la solución de autosemejanza de 1ª Especie, que da la solución del 2d0 problema de Stokes.

Considere nuevamente la situación descripta en el problema **6.7**, aunque ahora la sutil pero gran diferencia, se debe a que el fluido no se extiende indefinidamente en la zona $0 < y < \infty$, sino que a distancia *h*, se encuentra un plano infinito en reposo paralelo al fondo rígido, que limita por encima al fluido. **Ayuda**: Acheson, D.J., pág. 40.
a) cómo se modifican las condiciones de contorno?
b) para poder encontrar la solución al campo de velocidades, el problema debe ser separado como superposición de otros dos. Porqué es necesario hacer esto?
c) Observe que el problema **6.7**, se obtiene en el límite $h \to \infty$. Justamente, cuando alguno de los parámetros que aparecen en las condiciones iniciales y/o de contorno se comporta de manera singular, esto es o bien "dan" cero o infinito, el paso al límite de la solución del transitorio dependiente del tiempo es regular y tiende a una solución

autosemejante de 1ª Especie, en donde el parámetro h, deja de ser relevante en la solución.

Demuestre la afirmación anterior tomando el límite $h \to \infty$ en la solución del transitorio, pero haciéndolo para el módulo de la vorticidad $\omega = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, (que es más sencillo) para arribar a la solución hallada en el problema autosemejante **6.7**.



A t=0 el plano inferior arranca súbitamente con velocidad constante U.