

Estructura de la Materia I

Práctica 7 ~ Fluidos Ideales ~ Ondas de gravedad

7.1 Cuando un fluido incompresible se encuentra en reposo y la única fuerza externa es la producida por el campo gravitatorio, su superficie libre expuesta a una atmósfera de densidad mucho menor es plana.

Si se produce (de alguna manera que no es de interés por el momento) una perturbación externa sobre la superficie, el fluido se reacomoda "elásticamente" propagando un movimiento sobre la misma con la forma de ondas que son llamadas *de gravedad*.

En particular estamos interesados en el estudio de la propagación de estas ondas en el régimen en el que la velocidad de las partículas de fluido es pequeña como para que pueda despreciarse el término convectivo en la ecuación de Euler. Así, siendo un fenómeno dependiente del tiempo, el balance entre fuerzas generadoras de movimiento es el debido a una competencia entre el gradiente de presiones y la gravedad.

Las hipótesis de este modelo resultan en el estudio de un flujo potencial.

a) si la amplitud de la perturbación que se propaga tiene una amplitud a y las variaciones en la velocidad de las partículas se aprecia en una distancia del orden de la longitud de onda λ de la perturbación, vea cuál es la condición que se cumple al despreciar $|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|$.

b) despreciar el término convectivo e suponer un flujo potencial de modo que $\mathbf{u} = \nabla \phi$, ϕ la función escalar potencial de velocidades. Qué otra hipótesis está implícita en esta suposición?

i) Vea que si $\mathbf{g} = -g \hat{z}$ y $z=0$ corresponde a los puntos de la superficie del fluido en reposo que se extiende según (x, y) y la función $\zeta = \zeta(x, y, t)$ representa a un

punto de la superficie perturbada, entonces $g\zeta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = 0$, es la condición sobre la superficie.

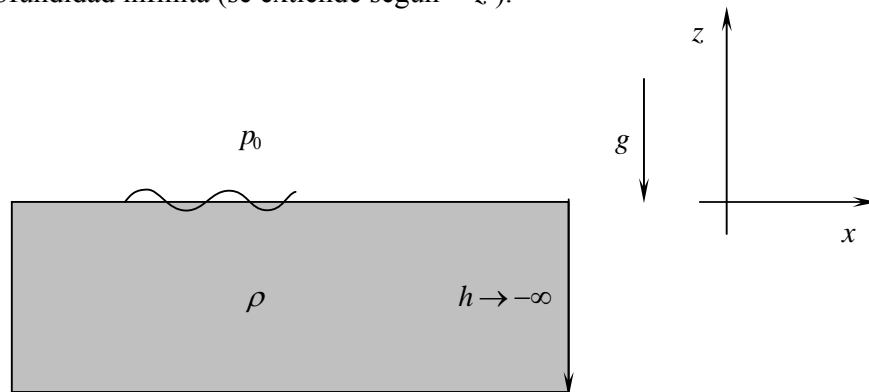
Tenga en cuenta que conocido el potencial de velocidades para todo tiempo podría obtenerse la forma de la superficie libre para todo t .

- ii) Describa cómo se llega al siguiente sistema de ecuaciones que describe el movimiento bajo estudio en un campo gravitacional (un fluido con su superficie libre expuesta):

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \end{cases}$$

- iii) Considere que el fluido en cuestión se extiende infinitamente y que la amplitud de la perturbación es muy pequeña en comparación con la profundidad del mismo.

- a) Obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$, si las ondas que se propagan en la superficie del fluido lo hacen en dirección \hat{x} , existe simetría según \hat{y} y el fluido tiene profundidad infinita (se extiende según $-\hat{z}$).



- b) Obtenga el potencial de velocidades para todo t y a partir de allí el campo de velocidades $(u_x, 0, u_z) = (\partial_x\phi, 0, \partial_z\phi)$. Porqué existe una constante sin determinar?

- c) Calcule la trayectoria de las partículas de fluido en la onda.
- d) calcule la velocidad de grupo y la de fase (o sea de propagación) de estas ondas de gravedad ($V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$, $V_f = \frac{\omega}{k}$).

7.2 Cuando se tienen dos fluidos incompresibles (e ideales) en contacto, sin contornos cercanos según (x,y) , siendo plana la superficie de separación en reposo (no se mezclan ni reaccionan por ningún mecanismo), el conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de las ondas de gravedad que se generan por una perturbación externa, por ejemplo, no sólo en la superficie libre del fluido en contacto con una atmósfera de densidad tenue (digamos a presión p_0) sino en la superficie de separación entre los mismos, deben ser modificadas.

- a) si la densidad y profundidad del líquido inferior son ρ , h y las del superior ρ' , h'

vea que el sistema a resolver ahora es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi' = 0 \\ \nabla^2 \phi = 0 \\ \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right)_{z=h'} = 0 \\ \left(g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

si la superficie de separación entre los medios está en $z = 0$.

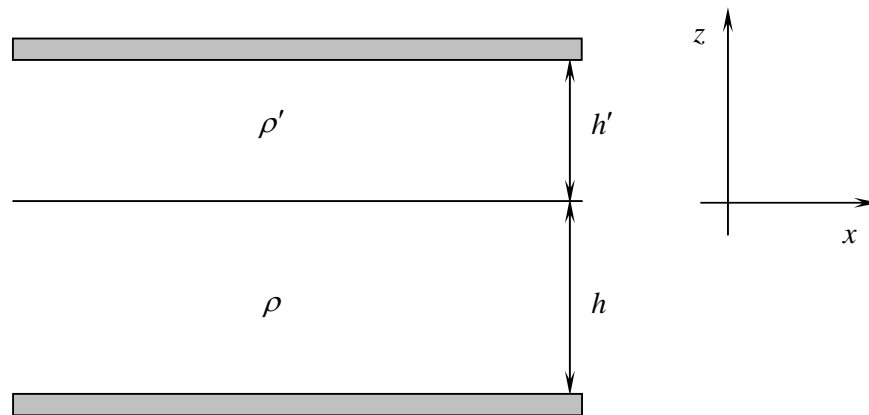
- b) observe que además deben suplementarse condiciones de contorno y de empalme por continuidad de los potenciales de velocidades para cada fluido. Escriba explícitamente estas condiciones de contorno cuando alguno de los fluidos se encuentra limitado (superior o inferiormente) por un plano infinito paralelo a la superficie en reposo.
- c) Obtenga la expresión de las funciones que representan la forma de la superficie de contacto entre los fluidos y de la superficie libre del fluido superior, digamos

$\zeta = \zeta(x, t)$ y $\eta = \eta(x, t)$ respectivamente. (ojo que $\eta(x, t)$ oscila alrededor de $z = h'$).

7.3 a) Determine la relación de dispersión de las ondas de gravedad que se propagan en la superficie de contacto entre dos líquidos ideales si el sistema está limitado exteriormente por dos placas horizontales infinitas. La densidad y la profundidad del líquido inferior son ρ , h y las del superior ρ' , h' con $\rho > \rho'$. (Ver figura). Por qué es necesaria esta última condición?

Revise la expresión dada como solución $w = w(k)$ en la página 41 del libro de Landau & Lifshitz, *Fluid Dynamics*.

b) Considere los casos límites $kh \gg 1$ y $kh' \gg 1$ (ambos fluidos de profundidad infinita) y por otra parte $kh \ll 1$ y $kh' \ll 1$ (ondas largas) ($k = 2\pi / \lambda$).



7.4 Ahora resuelva el caso en que el fluido superior posee su superficie libre de moverse y el inferior tiene profundidad infinita. (discuta la posibilidad de existencia de modos que se propagan en la interfase cuando en la superficie libre “casi” no se observa nada; aguas muertas)

7.5 Resuelva el caso en que el fluido inferior se encuentra limitado por el fondo a una distancia h . y el superior tiene su superficie libre.

7.6 Si un fluido de profundidad h se encuentra en un estanque rectangular de lados a y b , encuentre las posibles frecuencias de oscilación (ondas estacionarias) de las ondas que se generan en su superficie.