Estructura de la Materia I

Práctica 0

1. Se utilizará la densidad tensorial de 2^{do} orden δ_{ij}, llamada delta de Krönecker, que se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

También se defin e el pseudotensor isótropo de tercer orden ε_{ijk} llamado pseudotensor o densidad tensorial de Levi-Civita, como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ forman una permutación par de la terna } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ forman una permutación impar de la terna } \{1,2,3\} \\ 0 & \text{si por lo menos dos índices son iguales} \end{cases}$$

$$1 \leq i, j, k \leq 3$$

i) visualice gráficamente en un gráfic o 3-D esta densidad tensorial. Cuántos elementos tiene?

ii) comprobar la identidad:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

(la prueba puede parecerle no formal, OK no importa: hay que pensar un poco)

iii) Verificar que:

a) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$ b) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$ (no es a) ???)

c) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ d) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$ e) $\delta_{mn}\,\delta_{mn} = 3$

iv) Si $\hat{e}_i$, (i=1,2,3) es una terna de versores ortogonales, verificar que:

a) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \varepsilon_{ijk}\; A_j\; B_k\; \hat{e}_i$ b) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{C} = \varepsilon_{ijk}\; \dfrac{\partial C_k}{\partial x_j}\; \hat{e}_i$

2. Demostrar que todo tensor de 2do orden σ_{ij} se puede descomponer como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(\mathrm{I})} + \sigma_{ij}^{(\mathrm{S})} + \sigma_{ij}^{(\mathrm{A})} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

donde:

$\sigma_{ij}^{(\mathrm{I})} = \lambda\,\delta_{ij}$ es un tensor isótropo.

$\sigma_{ij}^{(\mathrm{S})}$, es un tensor simétrico de traza nula.

$\sigma_{ij}^{(\mathrm{A})}$, es un tensor antisimétrico.

3. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{s}$ cuatro vectores, ψ y ϕ dos funciones escalares. Utilizando notación indicial, verificar las siguientes identidades:

i) $\boldsymbol{u}\,.\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\,.\,(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\,.\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ (regla cíclica del producto mixto)

ii) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{v})$ (reemplazando $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{C}$, es la típica regla ***BAC**A-**CAB**ALLO*)

iii) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\,.\,(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{w})\,(\boldsymbol{v}\,.\,\boldsymbol{s}) - (\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{s})(\boldsymbol{v}\,.\,\boldsymbol{w})$

iv) $\boldsymbol{\nabla}\,.\,\boldsymbol{r} = 3 \qquad (\ \boldsymbol{r} = (x, y, z)\,)$

v) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{r} = 0$ vi) $\boldsymbol{\nabla}\; r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ vii) $\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

viii) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$

ix) $\boldsymbol{\nabla}\,.(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}) = 0$

x) $\boldsymbol{\nabla}^2\psi = \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\psi)$

xi) $\boldsymbol{\nabla}^2(\phi\psi) = \phi\,(\boldsymbol{\nabla}^2\psi) + \psi\,(\boldsymbol{\nabla}^2\phi) + 2\,\boldsymbol{\nabla}\phi\boldsymbol{.}\boldsymbol{\nabla}\psi$

xii) $\boldsymbol{\nabla}(\phi\,\psi) = \phi\,\boldsymbol{\nabla}\psi\ + \psi\,\boldsymbol{\nabla}\phi$

xiii) $\boldsymbol{\nabla.}\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v.}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u.}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})$

xiv) $\boldsymbol{\nabla}.(\phi\,\boldsymbol{u}) = \phi\ \boldsymbol{\nabla}.\,\boldsymbol{u} +\ \boldsymbol{u}\ .\boldsymbol{\nabla}\phi$

xv) $\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\,\boldsymbol{u}) = \phi\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\phi\times\boldsymbol{u}$

xvi) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{\nabla}.\,\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{\nabla}.\,\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}$

xvii) $\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u})$

xviii) $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}.\,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u})$

xix) $(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{.}\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u})$