Estructura de la Materia I

Práctica 2 Ecuación Indefinida - Ecuación de Euler - Hidrostática

2.1 Notación: Para los siguientes problemas, considere la ecuación indefinida en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x = \rho a_x$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_y = \rho a_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho a_z$$

donde σ es el campo tensorial de esfuerzos del medio continuo, a el campo de aceleraciones, f el campo de fuerzas externas por unidad de masa y ρ la densidad de masa del medio. Entonces:

Considere que el medio continuo en cuestión es un sólido de densidad uniforme ρ_0 en forma de paralelepípedo, de manera que un punto cualquiera del mismo se designa por (X, Y, Z), con $0 \leq X \leq a$, $0 \leq Y \leq b$, y $0 \leq Z \leq c$.

El cuerpo se traslada en la dirección z, de manera que cada punto del cuerpo tiene coordenadas: $x = X$, $y = Y$, $z = Z + \alpha(t)$.

El campo de fuerzas externas es el de la gravedad $f = (0, 0, g)$ y existen también fuerzas aplicadas sobre las caras $Z = 0$ y $Z = c$, dadas respectivamente por $(0, 0, F_0(t))$ y $(0, 0, F_c(t))$ que son uniformes sobre las caras correspondientes; no hay fuerzas aplicadas en las caras $X = 0$, $X = a$, $Y = 0$, $Y = b$.

Usando las condiciones sobre las caras laterales, muestre que en todo punto del cuerpo es: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, y que la ecuación de movimiento es:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} = \rho_0(\ddot{\alpha} - g)$$

Resuelva y determine la ecuación para $\alpha(t)$. Se obtiene lo esperado?

2.2 Demuestre, por la conservación del momento angular, que en ausencia de cuplas de volumen el tensor de esfuerzos debe ser simétrico, esto es $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

2.3 Muestre que para un fluido en reposo sobre el cual actúan fuerzas de volumen conservativas, la ecuación indefinida se reduce a:

a) si el fluido es incompresible:

$$\frac{p}{\rho} + \Phi = cte$$

b) si el fluido no intercambia calor con el medio externo:

$$H + \Phi = cte$$

c) si el fluido se mantiene a temperatura constante:

$$G + \Phi = cte$$

donde Φ es el potencial por unidad de masa del cual se derivan las fuerzas de volumen que actúan sobre el fluido (INCLUIDAS LAS INERCIALES), p es la presión, ρ la densidad, H la entalpía y G la función de Gibbs, ambas últimas por unidad de masa del fluido.

2.4 TAQUÍMETRO HIDROSTÁTICO

Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio R y altura 2H, inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme Ω.

a) cuál es la forma de la superficie libre del líquido?

b) para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?

c) para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si R=5 cm, H=7.5 cm, g= 10 m/seg^2 ?. Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.

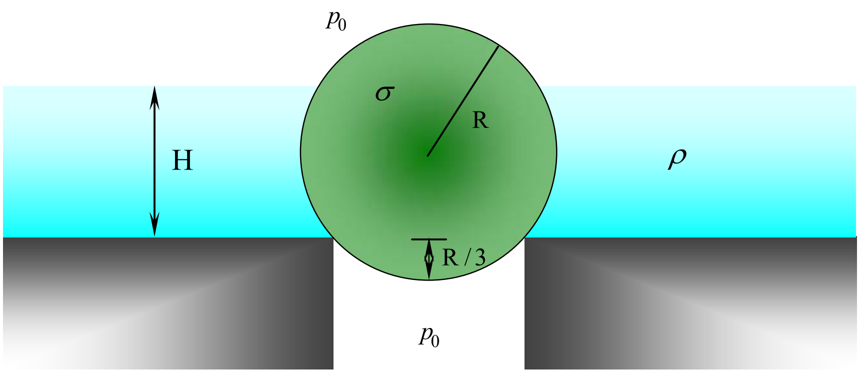
d) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en c) y ν=90 vueltas/minuto, grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:

i) en reposo

ii) durante la rotación

e) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

2.5 Una esfera sólida de densidad σ uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad ρ, en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura H desde el fondo de la pileta.



Analizar bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe.

Para ello:

a) Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de H (no ponga limitaciones sobre este parámetro ya que el líquido puede o no tapar totalmente a la esfera. Tener en cuenta ambas posibilidades)

b) Grafique el empuje como función de H e interprete cualitativamente.

c) Si $\sigma = \alpha \rho$, verifique que el valor mínimo de α para el cual se obtiene obturación para todo H es: $\alpha = 8/27$.

2.6 Un fluido perfecto se caracteriza por la siguiente relación constitutiva:

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T)\,\delta_{ij}$$

a) Muestre que en tal caso, la ecuación de movimiento se escribe:

$$-\frac{\partial p}{\partial \rho}\boldsymbol{\nabla}\rho - \frac{\partial p}{\partial T}\boldsymbol{\nabla} T + \rho\,\boldsymbol{f} = \rho\,\boldsymbol{a}$$

b) El comportamiento del agua a una dada temperatura, se modela bien por la relación $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad en ausencia de presión y K una constante.

Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción del campo de fuerza externa $f = (0, 0, g)$, determine la distribución de presión y de densidad del agua sabiendo que en $Z = 0$ es $\rho = \rho_0$.

c) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ($K \to \infty$). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ($K = 2.10^9\ N/\mathrm{m}^2$, $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$) (desprecie la presión en la superficie).

d) Considere nuevamente un fluido ideal, pero esta vez un gas ideal, con ecuación de estado: $p = R\rho T / m$, con R la constante universal de los gases y m la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas externas $f = (0, 0, -g)$, la presión a una altura z está dada por:

$$p = p_0 \exp\left\{ -\frac{mg}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right\}$$

d) Muestre que si T depende de x, y, z, no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

2.7 MODELO SIMPLIFICADO DE LA ATMÓSFERA TERRESTRE

Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura z sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores p_0, ρ_0 y T_0, respectivamente.

Suponga que la Tierra es plana, la gravedad constante y la atmósfera está en reposo, y también que el aire es un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan a través de: $p\rho^{-\gamma} = cte$. (cuantifique para $\gamma = 7/5$, atmósfera adiabática, y $\gamma = 1$, atmósfera isotérmica).

2.8 Un cilindro similar al del problema **2.4**, contiene una masa M de gas ideal a temperatura constante. Hallar la distribución de la densidad de esta masa de gas $\rho(r, z)$.

2.9 Obtener una expresión para la distribución de presión de una estrella esférica autogravitante♣ en los casos:

a) $\rho = \text{cte}$.

♣ (pág. 19, libro de G. K. Batchelor, An Intr. to Fluid Dynamics)

En este caso verifique que la estrella tiene un radio finito (cuál es la condición para ello?)

b) $p = C\,\rho^{6/5}$.

Observe que en esta situación la estrella se extiende indefinidamente, pero su masa es finita.

c) $\rho = \rho_c(1-\beta r^2)$.

Calcule la presión en el centro y muestre que si la densidad media es el doble de la densidad en la superficie, la presión en el centro es mayor por un factor 13/8 de la que se obtendría suponiendo que la estrella tuviera densidad uniforme con la misma masa total y el mismo radio.

El potencial autogravitatorio verifica: $\nabla^2\Psi = 4\pi\, G\,\rho$, con G la constante de gravitación, de modo que si: $-\rho\nabla\Psi = \nabla p$, entonces: $\nabla.(\nabla p/\rho) = -4\pi\, G\rho$ es la ecuación a resolver.