Estructura de la Materia I

Práctica 7 ~ Fluidos Ideales ~ Ondas de gravedad

7.1 Cuando un fluido incompresible se encuentra en reposo y la única fuerza externa es la producida por el campo gravitatorio, su superficie libre expuesta a una atmósfera de densidad mucho menor es plana.

Si se produce (de alguna manera que no es de interés por el momento) una perturbación externa sobre la superficie, el fluido se reacomoda "elásticamente" propagando un movimiento sobre la misma con la forma de ondas que son llamadas *de gravedad*.

En particular estamos interesados en el estudio de la propagación de estas ondas en el régimen en el que la velocidad de las partículas de fluido es pequeña como para que pueda despreciarse el término convectivo en la ecuación de Euler. Así, siendo un fenómeno dependiente del tiempo, el balance entre fuerzas generadoras de movimiento es el debido a una competencia entre el gradiente de presiones y la gravedad.

Las hipótesis de este modelo resultan en el estudio de un flujo potencial.

a) si la amplitud de la perturbación que se propaga tiene una amplitud a y las variaciones en la velocidad de las partículas se aprecia en una distancia del orden de la longitud de onda λ de la perturbación, vea cuál es la condición que se cumple al despreciar $\left|(\boldsymbol{u}\,.\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u}\right| << \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|$.

b) despreciar el término convectivo es suponer un flujo potencial de modo que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$, ϕ la función escalar potencial de velocidades. Qué otra hipótesis está implícita en esta suposición?

i) Vea que si $\boldsymbol{g} = -g\,\hat{z}$ y $z = 0$ corresponde a los puntos de la superficie del fluido en reposo que se extiende según (x, y) y la función $\zeta = \zeta(x, y, t)$ representa a un punto de la superficie perturbada, entonces $g\zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = 0$, es la condición sobre la superficie.

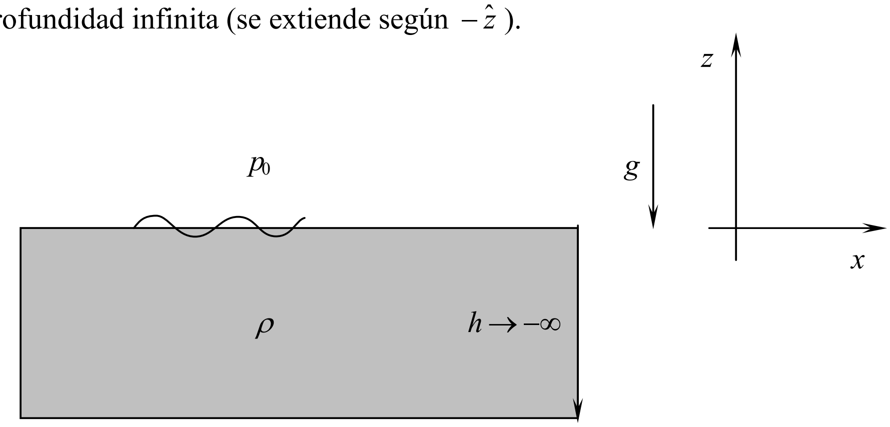
Tenga en cuenta que conocido el potencial de velocidades para todo tiempo podría obtenerse la forma de la superficie libre para todo *t*.

ii) Describa cómo se llega al siguiente sistema de ecuaciones que describe el movimiento bajo estudio en un campo gravitacional (un fluido con su superficie libre expuesta):

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \end{cases}$$

iii) Considere que el fluido en cuestión se extiende infinitamente y que la amplitud de la perturbación es muy pequeña en comparación con la profundidad del mismo.

a) Obtener la relación de dispresión $w = w(k)$, si las ondas que se propagan en la superficie del fluido lo hacen en dirección $\hat{x}$, existe simetría según $\hat{y}$ y el fluido tiene profundidad infinita (se extiende según $-\hat{z}$).



b) Obtenga el potencial de velocidades para todo *t* y a partir de allí el campo de velocidades $(u_x, 0, u_z) = (\partial_x \phi, 0, \partial_z \phi)$. Porqué existe una constante sin determinar?

c) Calcule la trayectoria de las partículas de fluido en la onda.

d) calcule la velocidad de grupo y la de fase (o sea de propagación) de estas ondas de gravedad ($V_g = \dfrac{\partial w}{\partial k}$, $V_f = \dfrac{w}{k}$).

7.2 Cuando se tienen dos fluidos incompresibles (e ideales) en contacto, sin contornos cercanos según (x,y), siendo plana la superficie de separación en reposo (no se mezclan ni reaccionan por ningún mecanismo), el conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de las ondas de gravedad que se generan por una perturbación externa, por ejemplo, no sólo en la superficie libre del fluido en contacto con una atmósfera de densidad tenue (digamos a presión p_0) sino en la superficie de separación entre los mismos, deben ser modificadas.

a) si la densidad y profundidad del líquido inferior son ρ, h y las del superior ρ', h'

vea que el sistema a resolver ahora es:
$$\begin{cases} \nabla^2\phi' = 0 \\ \nabla^2\phi = 0 \\ \left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial z} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}\right)_{z=h'} = 0 \\ \left(g(\rho-\rho')\dfrac{\partial\phi}{\partial z} + \rho\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho'\dfrac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \end{cases}$$

si la superficie de separación entre los medios está en $z = 0$.

b) observe que además deben suplementarse condiciones de contorno y de empalme por continuidad de los potenciales de velocidades para cada fluido. Escriba explícitamente estas condiciones de contorno cuando alguno de los fluidos se encuentra limitado (superior o inferiormente) por un plano infinito paralelo a la superficie en reposo.

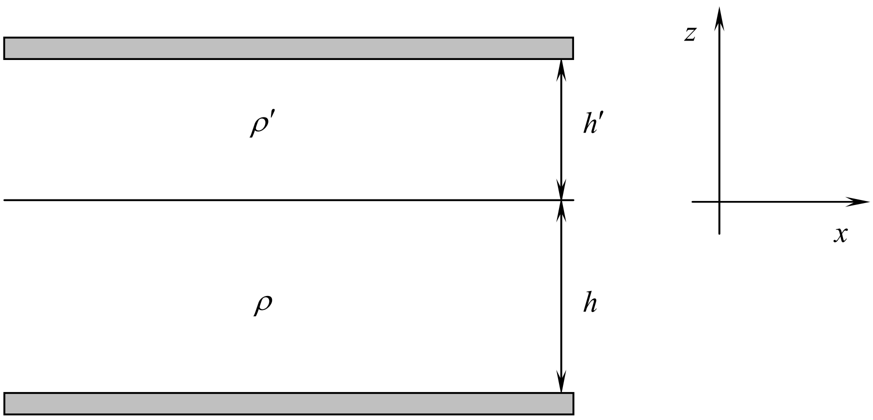
c) Obtenga la expresión de las funciones que representan la forma de la superficie de contacto entre los fluidos y de la superficie libre del fluido superior, digamos

$\zeta = \zeta(x,t)$ y $\eta = \eta(x,t)$ respectivamente. (ojo que $\eta(x,t)$ oscila alrededor de $z = h'$).

7.3 a) Determine la relación de dispersión de las ondas de gravedad que se propagan en la superficie de contacto entre dos líquidos ideales si el sistema está limitado exteriormente por dos planos horizontales infinitos. La densidad y la profundidad del líquido inferior son ρ, h y las del superior ρ', h' con $\rho > \rho'$. (Ver figura). Porqué es necesaria esta última condición?

Revise la expresión dada como solución $w = w(k)$ en la página 41 del libro de Landau & Lifshitz, *Fluid Dynamics*.

b) Considere los caso límites $kh >> 1$ y $kh' >> 1$ (ambos fluidos de profundidad infinita) y por otra parte $kh << 1$ y $kh' << 1$ (ondas largas) ($k = 2\pi / \lambda$).



7.4 Ahora resuelva el caso en que el fluido superior posee su superficie libre de moverse y el inferior tiene profundidad infinita. (discuta la posibilidad de existencia de modos que se propagan en la interfase cuando en la superficie libre "casi" no se observa nada;aguas muertas)

7.5 Resuelva el caso en que el fluido inferior se encuentra limitado por el fondo a una distancia *h*. y el superior tiene su superficie libre.

7.6 Si un fluido de profundidad *h* se encuentra en un estanque rectangular de lados a y b, encuentre las posibles frecuencias de oscilación (ondas estacionarias) de las ondas que se generan en su superficie.

7.7 Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

La estabilidad de flujos base con cizalladura (y por lo tanto de rotor no nulo) no puede estudiarse con el formalismo de ondas previo, que supone flujos base irrotacionales. Para el caso de flujos incompresibles homogéneos puede usarse el formalismo de Orr-Sommerfeld, que para el caso de flujos a altos números de Reynolds, fuera de las capas límite se reduce a la ecuación (ver apuntes de clase)

$$\{D^2U(z)-[U(z)-c](D^2-k^2)\}\delta\hat{u}_z=0\,, \qquad (1)$$

donde $U(z)\mathbf{e}_x$ es el flujo base, $D\equiv d/dz$, $k^2=k_x^2+k_y^2$, $\delta\hat{u}_z(z)$ es la amplitud (dependiente de z) del modo de Fourier con (ω,k_x,k_y) de la perturbación de la velocidad componente z, y $c\equiv\omega/k_x$.

a) Suponiendo que el flujo base tiene una discontinuidad, sea en la velocidad misma o en su derivada DU, integrando por partes (1) a través de la discontinuidad pruebe que la magnitud $\delta\hat{u}_z DU-(U-c)D\delta\hat{u}_z$ tiene el mismo valor a ambos lados de la discontinuidad.

b) Usando la ecuación (1) y la relación obtenida en a) determine la relación de dispersión de pequeñas perturbaciones para un fluido homogéneo, sin contornos cercanos, cuyo campo de velocidades está dado por (suponga $k_y=0$)

$$U(z)=\begin{cases}U_1, & z>0\\ U_2, & z<0\end{cases}$$

(Note que para este perfil la relación de dispersión puede obtenerse por el método usado en ondas de gravedad)

c) Muestre que la velocidad de fase es la misma para todas las perturbaciones (igual al promedio entre U_1 y U_2), y que el flujo es inestable siempre que $U_1\neq U_2$, con mayor tasa de crecimiento cuanto más corta es la longitud de onda.

d) Un perfil más realista tiene una zona finita de transición entre ambas velocidades, que puede estar dada por

$$U(z) = \begin{cases} U_1, & z > h/2 \\ \dfrac{1}{2}(U_1 + U_2) + (U_1 - U_2)\dfrac{z}{h}, & -h/2 < z < h/2 \\ U_2 & z < -h/2 \end{cases}$$

Determine la relación de dispersión correspondiente.

e) Muestre que se obtiene el resultado del punto b) en el límite de ondas largas comparadas con el espesor de la capa de transición ($kh << 1$), mientras que no hay inestabilidad en el límite de ondas cortas ($kh >> 1$).

f) Muestre que la transición entre perturbaciones estables e inestables corresponde a números de onda $kh \approx 1.3$.

g) Muestre que la máxima tasa de crecimiento ocurre para $kh \approx 0.8$, y que vale $\sigma \approx 0.2(U_1 - U_2)/h$.