En el ejercicio 12 de la guía 2 se nos plantea, entre otras cosas, hallar el empuje sobre el tapón esférico de la figura correspondiente (remitirse a la misma en la guía). Para ello, recordemos la definición formal del empuje:

$$\underline{E} = -\oint_S p(\underline{r})\ \breve{n}\ dS\ ,$$

donde $\breve{n}$ es la normal exterior al volumen en cuestión, y la integral se lleva a cabo sobre la superficie cerrada que encierra el volumen.

Si la presión fuera una función contínua de la posición, la generalización del teorema de Gauss integral para funciones escalares nos permite convertir la integral de superficie en una integral de volumen de la siguiente manera:

$$\underline{E} = -\int_{V(S)} \underline{\nabla}\ p(\underline{r})\ dV\ .$$

En tal caso, se podría utilizar la ecuación de Euler para un fluído estático y reemplazar el término $\underline{\nabla}\ p(\underline{r})$ por la correspondiente expresión. Haciendo esto para el caso en que la única fuerza de masa es la gravitoria, y el fluído es incompresible, se obtiene la conocida relación en la cual se vincula el empuje con el peso de líquido desalojado.

El problema que enfrentamos, es que nuestro tapón esférico no está en un campo contínuo de presión, por lo que la expresión para el gradiente se torna algo más compleja si se quiere seguir utilizando la integral en volumen. Nosotros elegimos el camino de resolver la integral de superficie sin hacer uso del teorema integral mencionado.

Para ello, es necesario elegir las coordenadas que nos parezcan más “amigable” para realizar tal integral, y escribir la expresión del campo de presiones y del diferencial de superficie, junto con la parametrización correcta de ésta última, para poder proceder con el cálculo.

En éste cálculo, vamos a proceder utilizando coordenadas cilíndricas (es posible también proceder en esféricas, claramente), ya que nos resulta un poco más sencillo escribir los intervalos de integración en estas coordenadas, y la expresión explícita del campo de presión. Veamos como escribimos este último.

Poniendo el origen de coordenadas en el centro geométrico del tapón con la dirección positiva de z hacia arriba, y sobreentendiendo que la expresión es válida para todo punto sobre la superficie (al menos), se tiene:

$$p(\underline{r}) = \{ \begin{array}{cc} p_0 - \rho_0 g(z - z_0), & -\frac{2}{3}R \leq z \leq z_0 = H - \frac{2}{3}R \\ p_0 \qquad\qquad\qquad , & el\ resto \end{array}\ ,$$

en donde p_0 es la presión atmosférica, ρ_0 la densidad del líquido, g la aceleración de la gravedad, R el radio del tapón y H el nivel del líquido por encima del suelo. $z_0 = H - \frac{2}{3}R$ corresponde al valor de z para la superficie del líquido, en donde la presión es p_0 por continuidad. Notemos que la presión no es contínua, ya que en el fondo del líquido, justo antes del orificio, toma el valor $p_0 + \rho_0 gH$ y en el orificio tiene el valor p_0

La integral de superficie queda partida en tres partes, la parte del casquete superior que no está cubierto por el fluído (S_1), el casquete sumergido (S_2), y el casquete inferior que se encuentra dentro del orificio, sumergido una profundidad de $R/3$ (S_3). La integral de superficie correspondiente a la parte sumergida contiene dos términos, uno para el término de la presión que no depende de z, p_0, y el que depende de z. Juntanto los tres términos para cada parte del casquete esférico en los que aparece solo p_0 en el integrando, obtenemos la integral:

$\underline{E} = -\oint_S p(\underline{r})\ \breve{n}\ dS = -\int_{S_1} p_0\ \breve{n}\ dS - \int_{S_2} p_0\ \breve{n}\ dS - \int_{S_3} p_0\ \breve{n}\ dS + \rho_0\ g \int_{S_2} (z - z0)\ \breve{n}\ dS =$
$-\oint_S p_0\ \breve{n}\ dS + \rho_0\ g \int_{S_2} (z - z_0)\ \breve{n}\ dS$.

La primera de las dos integrales de la expresión final se anula automáticamente ya que p_0 es una constante.

En coordenadas cilíndricas, la normal $\breve{n}$ queda expresada en la forma:

$$\breve{n} = \frac{r}{R}\cos(\varphi)\breve{x} + \frac{r}{R}\sin(\varphi)\breve{y} + \frac{z}{R}\breve{z}\ ,$$

con (r, φ, z) las coordenadas cilíndricas radial, angular y vertical.

Es fácil ver que las integrales en los versores $\breve{x}$ e $\breve{y}$ se anulan debido a los términos con funciones trigonométricas, quedando solamente para calcular explícitamente el término en el versor $\breve{z}$, lo que era de esperarse.

El diferencial de superficie de una esfera en coordenadas cilíndricas es $dS = R\, d\varphi\, dz$. Este dS es poco intuitivo, pero puede comprobarse que es el correcto realizando un cambio de variables en la expresión para el dS en coordenadas esféricas. Las coordenadas que describen la superficie están dadas por $0 \le r \le \sqrt{R^2 - z^2}$, $-R \le z \le R$ y $0 \le \varphi \le 2\pi$, como ya se usó para resolver integrales anteriores.

Dicho todo esto, procedemos a escribir la expresión de la integral a resolver:

$$\underline{E} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{2}{3}R}^{H-\frac{2}{3}R} dz\, \rho_0\, g\, (z - z_0) R\, \frac{z}{R}\, \breve{z}.$$

Esta expresión se reduce, luego de integrar en la coordenada angular, a la expresión:

$$\underline{E} = 2\pi\, \rho_0\, g\, \breve{z} \int_{-\frac{2}{3}R}^{H-\frac{2}{3}R} dz\, (z - z_0) z.$$

Esta es una integral sencilla de resolver, y tiene como resultado la expresión:

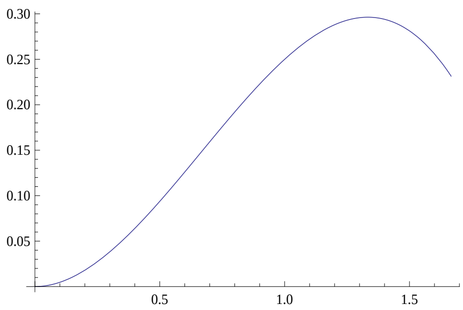
$$\underline{E}(H) = \frac{4\pi}{3} R^3\, \rho_0\, g\, F\left(\frac{H}{R}\right)\ \breve{z},$$

con $F\left(\frac{H}{R}\right)$ dado por,

$$F\left(\frac{H}{R}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{H}{R}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{R}\right)^3\right).$$

Notemos que $F\left(\frac{H}{R}\right)$ vale cero para $H=0$ y es máxima para $H=\frac{4}{3}R$, lo que se deduce de derivar la función y hallar las raíces de su derivada.

A continuación se da un gráfico de $F(\frac{H}{R})$ en el intervalo $0\leq\frac{H}{R}\leq\frac{5}{3}$



Para hallar el valor α_{min} hay que imponer que el módulo del peso del tapón sea mayor que el módulo del empuje $\forall H$, cuyo caso límite es justo cuando $H=\frac{4}{3}R$. Evaluando $F\left(\frac{H}{R}=\frac{4}{3}\right)$ e igualando el módulo del empuje con el módulo del peso, se obtiene el $\alpha_{min}=\frac{8}{27}$.

Como nota final, para los que ya vieron con bastante detalle el tratamiento de integrales con distribuciones, como por ejemplo en la materia Física Teórica I, hay un procedimiento muy sencillo para poder resolver la intregral en volumen teniendo en cuenta que en el gradiente de la presión aparecen expresiones con deltas de Dirac debido a la discontinuidad mencionada al comienzo, lo que hace la intregral bastante más sencilla, pagando el precio de utilizar una teoría matemática bastante más compleja.