

Estructura de la Materia 1

(Curso de Verano 2016 - Daniel Gómez)

Guía 2: Cinemática e hidrostática

1. Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = f(z),$$

para $t \geq 0$ y $z \geq 0$. Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

2. Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),$$

donde T_0 , α , L y τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante U .

- (a) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geoméricamente las componentes de la derivada total.
- (b) Repita el punto (a) para una descripción lagrangiana.

¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

3. Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades:
- (a) Una corriente uniforme $\mathbf{u}(x, t) = U\hat{x}$.
 - (b) Una fuente lineal de caudal constante $\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$.
 - (c) Un torbellino con circulación constante $\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$.
 - (d) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad U aumenta linealmente con el tiempo.
 - (e) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad U' de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ .

4. Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t}, \quad v_y(x, y, t) = c,$$

donde α , β y c son constantes con las dimensiones apropiadas. Grafique las distintas líneas en dos casos distintos:

- (a) $\alpha = \beta$
- (b) $\alpha = 2\beta$

5. Una esfera de radio R_0 en $t = 0$ se expande para $t > 0$ de acuerdo a la ley

$$R = R(t), \quad R(0) = R_0.$$

Encuentre dicha ley sabiendo que para $t > 0$ y $r > R(t)$, la velocidad de las partículas de fluido es $v_r(r) = v_0 R_0^2 / r^2$.

6. Calcule las deformaciones longitudinales, de corte y volumétricas para los flujos del problema 3.
7. Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular Ω , la vorticidad es $\omega = 2\Omega$.
8. Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades:

- (a) $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$
- (b) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
- (c) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} [1 - e^{-r^2/(4\nu t)}]$
- (d) $v_x = v_0 y/L$

9. Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:

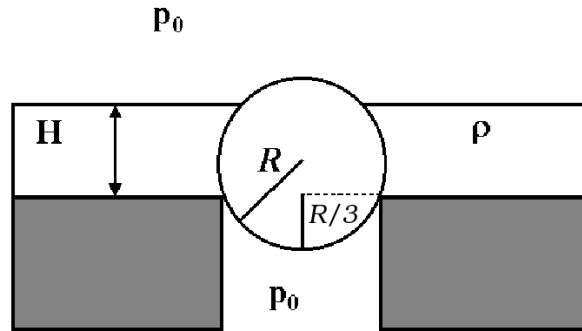
- (a) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.
- (b) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección \hat{z} .
- (c) Idem (b) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano (x, y) y contiene al origen, es el mismo.

10. *Taquímetro hidrostático:* Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio R y altura $2H$, inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme Ω .

- (a) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?
- (b) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?
- (c) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si $R = 5$ cm, $H = 7.5$ cm, $g = 10$ m/s²? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.
- (d) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (c), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:
- En reposo
 - Cuando el recipiente rota con frecuencia $\nu = 90$ r.p.m.
- (e) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

11. *Modelo de ciclón:* Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio a , que rota rígidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante Ω . Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en $r = a$, donde r es la coordenada radial cilíndrica con el eje z coincidente con el eje del núcleo.

- (a) Determine el campo de velocidades para todo valor de r .
- (b) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo r , en función de la presión muy lejos del eje p_∞ . Encuentre qué condición debe satisfacer Ω respecto del valor de la presión p_∞ .



12. Una esfera sólida de densidad σ uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad ρ , en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura H desde el fondo de la pileta. Analice bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe. Para ello:
- Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de H (tenga en cuenta que el líquido puede tapar o no totalmente a la esfera).
 - Grafique el empuje como función de H e interprete cualitativamente.
 - Si $\sigma = \alpha\rho$, verifique que el valor mínimo de α para el cual se obtiene obturación para todo H es $\alpha = 8/27$.
13. Calcule la fuerza total (y el punto de aplicación de la misma) que sufre una de las caras de una superficie plana S , de forma arbitraria, cuyo plano forma un ángulo α con la horizontal, y que se encuentra sumergida completamente en un líquido estático de densidad ρ . Sugerencia: utilice un sistema de coordenadas con origen en S y con uno de sus ejes perpendicular a dicha superficie.
14. El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad en ausencia de presión y K una constante.
- Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa y de volumen $\mathbf{F} = g\hat{z}$, determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en $z = 0$ es $\rho = \rho_0$.
 - Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ($K \rightarrow \infty$). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ($K = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 1000 \text{ Kg/m}^3$) (desprecie la presión en la superficie).
 - Considere ahora un gas ideal con ecuación de estado $p = \rho RT/m$, con R la constante universal de los gases y m la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas $\mathbf{F} = -g\hat{z}$, la presión a una altura z está dada por

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{mg}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right\}.$$

- Muestre que si T depende de x , y y z no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.
15. *Modelo simplificado de la atmósfera terrestre:* Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura z sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores p_0 , ρ_0 y T_0 respectivamente. Suponga que la Tierra es plana, la gravedad es constante y que la atmósfera está en reposo. Considere al aire como un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan mediante la relación $p\rho^{-\gamma} = \text{cte.}$ (atmósfera adiabática).

16. *Estrella autogravitante (equilibrio entre la gravedad propia y la presión)*: Obtener una expresión para la presión de una estrella esférica autogravitante, en los siguientes casos:

- (a) Densidad de masa uniforme ($\rho = \rho_0$). Verifique que la estrella tiene un radio finito (¿Cuál es la condición para que esto ocurra?).
- (b) El gas satisface la ecuación de estado $p = C\rho^{6/5}$. Observe que en esta situación la estrella se extiende indefinidamente, pero su masa es finita.

Utilice que el potencial autogravitatorio ϕ satisface $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ con G la constante de gravitación, de modo que si $-\rho\nabla\phi = \nabla p$, la ecuación a resolver será $\nabla \cdot \nabla(p/\rho) = -4\pi G\rho$.