La fuerza tiene simetria esférica y el ISM $\left.\begin{array}{l}\bar{F}_G = F(r)\,\hat{r}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{u} = u(r)\,\hat{r}$

Ecuación de continuidad de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u})}_{\text{divergencia}} = 0$$

Sabemos que $\rho = \rho(r)$ y $\bar{u} = u(r)\,\hat{r}$ por la simetría esférica

y $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ proceso estacionario.

Usamos la expresión de la divergencia en esféricas

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

$\bar{a} = \rho(r)\,u(r)\,\hat{r} \Rightarrow a_\theta = a_\varphi = 0$.

Entonces $\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u}) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\left(\overbrace{r^2\rho(r)u(r)}^{\text{solo depende de } r!}\right)}{\partial r} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{r^2\rho(r)\,u(r) = cte}$$

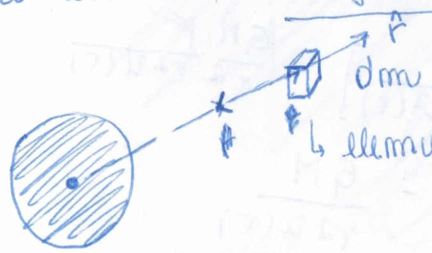
b- Ecuación de Euler.

$$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\bar{\nabla}p + \rho\bar{f} \qquad \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \overbrace{(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})}^{\text{Velocidad producto escalar gradiente}}\bar{u}$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}\right] = -\bar{\nabla}p + \rho\bar{f}$$

$\bar{f}$ ↳ fuerzas externas por unidad de masa.

- Estado estacionario $\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t} = 0$.
- Fuerza externa: la gravitatoria



↳ elemento de fluido

Objeto Compacto de masa m

$$d\bar{F}_g = \frac{-GM\,dm}{r^2}\,\hat{r}$$

$$d\bar{F}_g = \frac{-GM\rho(r)\,dV}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_g = \frac{d\bar{F}_g}{\rho(r)\,dV} = \frac{-GM}{r^2}\,\hat{r}$$

↳ fuerza por unidad de masa

• Término convectivo (componente r)

$$[(\bar{a}\cdot\bar{\nabla})\bar{b}]_r = a_r\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial b_r}{\partial \theta} + \frac{a_\varphi}{r\,\text{seno}}\frac{\partial b_r}{\partial \varphi} - \frac{a_\theta b_\theta + a_\varphi b_\varphi}{r}$$

En este caso $[(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}]_r = u(r)\dfrac{\partial u(r)}{\partial r}$

$\bar{u} = u(r)\hat{r}$

• Término de la presión (gradiente en esféricas)

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\text{seno}}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$$

$P = P(r) \Rightarrow \bar{\nabla} P = \dfrac{\partial P}{\partial r}\hat{e}_r$

Luego la componente radial de la ecuación de Euler para un ISM es

$$\boxed{\rho(r)u(r)\frac{\partial u(r)}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM\rho(r)}{r^2}}$$

c- $\dfrac{\partial P}{\partial \rho} = C_s^2$ $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial r} = \dfrac{\partial P}{\partial r}$ (regla de la cadena)

$\Rightarrow C_s^2\dfrac{\partial \rho}{\partial r} = \dfrac{\partial P}{\partial r}$

Luego Euler queda $\boxed{\rho(r)u(r)\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} = -C_s^2\dfrac{\partial P}{\partial r} - \dfrac{GM\rho(r)}{r^2}}$

d. Conocemos la relación entre $u(r)$ y $\rho(r)$ por el punto a)

$r^2u(r)\rho(r) = K \Rightarrow \rho(r) = \dfrac{K}{r^2u(r)}$

y $\dfrac{\partial \rho(r)}{\partial r} = \left[-\dfrac{2K}{r^3u(r)} - \dfrac{K}{r^2u^2(r)}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right]$

Reemplazo $\rho(r)$ y $\dfrac{\partial \rho(r)}{\partial r}$ en Euler

$$\frac{K}{r^2\cancel{u(r)}}\cdot\cancel{u(r)}\frac{\partial u(r)}{\partial r} = -C_s^2K\left[-\frac{2}{r^3u(r)} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r^2u^2(r)}\right] - \frac{GM}{r^2}\frac{\cancel{K}}{r^2u(r)}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial u(r)}{\partial r} = +\frac{C_s^2\,2}{r^3u(r)} + \frac{C_s^2}{r^2u^2(r)}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{GM}{r^2u(r)}$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial u(r)}{\partial r}\left[1 - \frac{C_s^2}{u^2(r)}\right] = \frac{2C_s^2}{u(r)r^3} - \frac{GM}{u(r)r^2}}$$

d - $u(r)\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} = -\dfrac{C_s^2}{\rho(r)}\dfrac{\partial \rho}{\partial r} - \dfrac{GM}{r^2}$ (*)

Conocemos la relación entre $u(r)$ y $\rho(r)$ por el punto a)

$r^2 u(r)\rho(r) = K \Rightarrow \rho(r) = \dfrac{K}{r^2 u(r)}$

y $\dfrac{\partial \rho(r)}{\partial r} = -\dfrac{2K}{r^3 u(r)} - \dfrac{K}{r^2 u^2(r)}\dfrac{\partial u}{\partial r}$.

Reemplazo $\rho(r)$ y $\dfrac{\partial \rho(r)}{\partial r}$ en (*)

$u(r)\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} = -C_s^2\dfrac{r^2 u(r)}{K}\left[-\dfrac{2K}{r^3 u(r)} - \dfrac{K}{r^2 u^2(r)}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r}\right] - \dfrac{GM}{r^2}$

$\Rightarrow u(r)\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} = \dfrac{2C_s^2}{r} + \dfrac{C_s^2}{u(r)}\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} - \dfrac{GM}{r^2}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial u(r)}{\partial r}\left[u(r) - \dfrac{C_s^2}{u(r)}\right] = \dfrac{2C_s^2}{r} - \dfrac{GM}{r^2}}$

En $r_s = \dfrac{GM}{2C_s^2}$ $\quad \dfrac{2C_s^2}{r_s} = \dfrac{2C_s^2 . 2C_s^2}{GM}$ $\quad$ y $\dfrac{GM}{r_s^2} = \dfrac{GM . 4C_s^4}{(GM)^2}$

son iguales!

$\Rightarrow \dfrac{\partial u(r)}{\partial r}\left[u(r) - \dfrac{C_s^2}{u(r)}\right]\Bigg|_{r=r_s} = 0$

Entonces o $\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} = 0$ o $C_s^2 = u^2(r) \Rightarrow u(r) = \pm C_s$

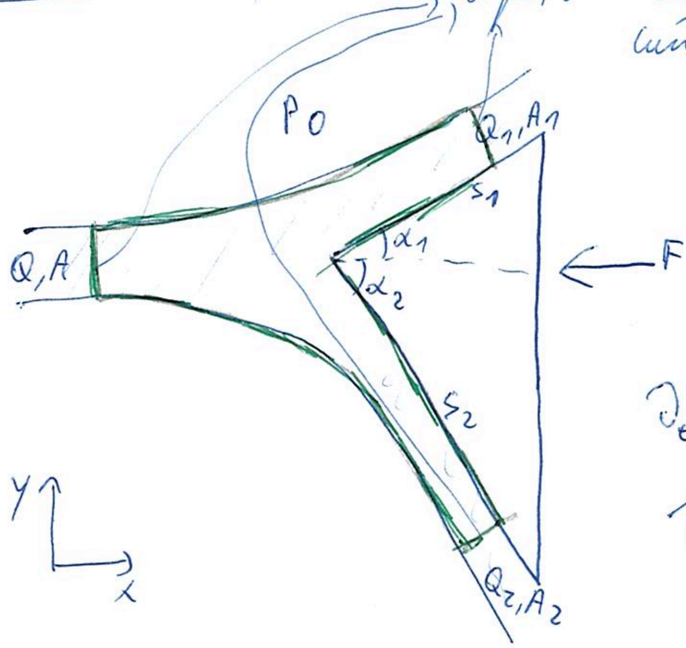
$\bar{u}(r) = -C_s\hat{r}$

El fluido se acelera hacia la masa.

P1 - Ej 2

E1	P1
19/05/17	

Tapas tomadas lejos de la cuña (para que $p=p_0$)



$$\underbrace{\cancel{\partial_t \int_V \rho \bar{v}\, dV}}_{\text{estacionario}} = -\oint_S \left[\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})\bar{v} + p\hat{n}\right] dS + \underbrace{\cancel{\int_V \rho \bar{f}\, dV}}_{\text{no hay } \bar{F} \text{ externa en volumen}}$$

$$0 = -\oint_S \left[\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})\bar{v} + (p-p_0)\hat{n}\right] dS$$

(a) $\rho(\bar{v}\cdot\hat{n})\bar{v}$ aporta sólo en las tapas A, A_1 y A_2

$(p-p_0)\hat{n}$ aporta sólo en la cuña (S_1 y S_2)

Luego, ~~como~~

$$0 = -\left[\int_A \rho \underbrace{(\bar{v}\cdot\hat{n})}_{-\frac{Q}{A}} \underbrace{\bar{v}}_{\frac{Q}{A}\hat{x}} dS + \int_{A_1} \rho \underbrace{(\bar{v}\cdot\hat{n})}_{\frac{Q_1}{A_1}} \underbrace{\bar{v}}_{\frac{Q_1}{A_1}(\cos\alpha_1 \hat{x} + \sin\alpha_1 \hat{y})} dS + \int_{A_2} \rho \underbrace{(\bar{v}\cdot\hat{n})}_{\frac{Q_2}{A_2}} \bar{v}\, dS\right] - \underbrace{\int_{\text{cuña}} \hat{n}(p-p_0) dS}_{=-\bar{F}}$$

$$\rightarrow \frac{Q_2}{A_2}(\cos\alpha_2 \hat{x} - \sin\alpha_2 \hat{y})$$

- $$\begin{cases} \hat{x}) \ +\rho\cdot\dfrac{Q^2}{A^2}\cdot A - \rho\dfrac{Q_1^2}{A_1^2}\cos\alpha_1 A_1 - \rho\dfrac{Q_2^2}{A_2^2}\cos\alpha_2 A_2 + F_x = 0 \\ \hat{y}) \ -\cancel{\rho}\dfrac{Q_1^2}{A_1^{\cancel{2}}}\sin\alpha_1 \cancel{A_1} + \cancel{\rho}\dfrac{Q_2^2}{A_2^{\cancel{2}}}\sin\alpha_2 \cancel{A_2} + F_y = 0 \end{cases}$$
- Además, $Q = Q_1 + Q_2$ (conservación del caudal)
- Por Bernoulli estacionario, $\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = cte\Big|_{\text{línea de corriente}} \Rightarrow V_0 = V_1 = V_2$

Entonces, para que $\bar{F} = F\hat{x}$, debe cumplirse $Q_1 \sin\alpha_1 = Q_2 \sin\alpha_2$

$A_1 \sin\alpha_1 = A_2 \sin\alpha_2$

(b) $\hat{x}$) $-\rho \frac{Q^2}{A} + \rho \frac{Q_1^2}{A_1} \cos\alpha_1 + \rho \frac{Q_2^2}{A_2} \cos\alpha_2 = F$

$$\left\{ \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q}{A} \right.$$

$$-\rho \frac{Q}{A}\left(Q - Q_1 \cos\alpha_1 - Q_2 \cos\alpha_2 \right) = F$$

Ahora bien, $Q = Q_1 + Q_2$ y $Q_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = Q_2 \operatorname{sen}\alpha_2$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= Q \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2} \\ Q_2 &= Q \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2} \end{aligned} \quad (c)}$$

Luego,

$$F = -\rho \frac{Q}{A}\left[Q - Q \frac{\operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2} - Q \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2} \right]$$

$$\boxed{F = -\rho \frac{Q^2}{A}\left[1 - \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2} \right]} \quad (b)$$

Problema (3)

a) $W_0(z) = U_\infty z + \frac{Q}{2\pi}\ln(z-2a) \rightarrow$ Teorema del círculo: $W(z) = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$

$$\Rightarrow W(z) = U_\infty\left(z + a^2/z\right) + \frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z-2a) + \ln\left(\frac{a^2}{z} - 2a\right)\right]$$

Reescribo el último término: $\ln\left(\frac{a^2}{z} - 2a\right) = \ln(a^2 - 2az) - \ln(z) = \ln(z - a/2) + \underbrace{\ln(-2a)}_{\text{descarto por ser cte.}} - \ln(z)$

$$\Rightarrow \boxed{W(z) = U_\infty\left(z + a^2/z\right) + \frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z-2a) + \ln(z - a/2) - \ln(z)\right]}$$

b) El flujo tiene simetría de reflexión respecto del eje x $\Rightarrow$ en $z = \pm a$ (y sobre todo el eje x) la velocidad no puede tener componente vertical, pero además tampoco puede tener componente horizontal, por ser la normal del contorno sólido en esa dirección. Conclusión: en $z = \pm a$ debemos tener $\vec{v} = 0$. Comprobemos analíticamente

$$\frac{dW}{dz} = v_x - i v_y = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z-2a} + \frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z}\right]$$

Evaluamos en $z = \pm a$:

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z=a} = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right) + \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{-a} + \frac{1}{a/2} - \frac{1}{a}\right] = 0$$

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z=-a} = U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right) + \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{-3a} + \frac{1}{3a/2} - \frac{1}{-a}\right] = 0$$

c) Por la simetría de reflexión de la configuración respecto del eje x la fuerza sobre el contorno sólido no puede tener componente vertical $\Rightarrow$ la fuerza sobre el contorno es en $\hat{x}$.

d) Usando Blasius: $F_x - iF_y = \oint_{|z|=a}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2}\oint_{|z|=a}\left\{U_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2a} + \frac{1}{z - a/2} - \frac{1}{z}\right)\right\}^2 dz$

Sólo contribuyen: $i\rho/2\oint_{|z|=a} 2\left\{\frac{U_\infty Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z-a/2} - \frac{1}{z} - \frac{a^2}{z^2(z-2a)}\right] + \frac{Q^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(z-2a)(z-a/2)} - \frac{1}{(z-2a)z}\right]\right\} dz$

(1) (2) (3) (4) (5)

(1) $\oint_{|z|=a}\frac{dz}{z - a/2} = 2\pi i$ (2) $\oint_{|z|=a}\frac{dz}{z} = 2\pi i$ (3) $\oint_{|z|=a}\frac{1/(z-2a)}{z^2}dz = 2\pi i\left.\left(\frac{1}{z-2a}\right)'\right|_{z=0} = \frac{-2\pi i}{4a^2}$

(4) $\oint_{|z|=a}\frac{1/(z-2a)}{z - a/2}dz = 2\pi i\left.\left(\frac{1}{z-2a}\right)\right|_{z=a/2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}a}$ (5) $\oint_{|z|=a}\frac{1/(z-2a)}{z}dz = 2\pi i\left.\left(\frac{1}{z-2a}\right)\right|_{z=0} = 2\pi i\cdot\frac{1}{-2a}$

$$\Rightarrow F_x - iF_y = i\rho\left\{\frac{U_\infty Q}{2\pi}2\pi i\left[1 - 1 + \frac{a^2}{4a^2}\right] + \frac{Q^2}{4\pi^2}2\pi i\left[-\frac{2}{3a} + \frac{1}{2a}\right]\right\}$$

$$F_x - iF_y = -\rho Q\left[\frac{U_\infty}{4} - \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{6a}\right] \begin{cases} F_y = 0 \\ F_x = \frac{\rho Q}{4}\left[\frac{Q}{3\pi a} - U_\infty\right]\end{cases}$$

Se anula F_x si: $Q = 3\pi$ [illegible]