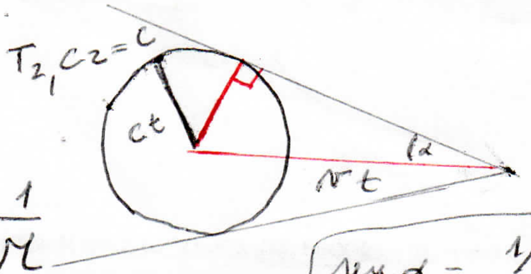
Problema ①



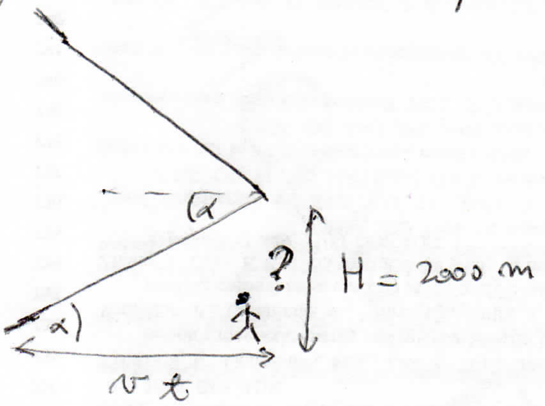
T_1, c_1 es dato $10°C \simeq 283.16 K$

a) $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = 1/M_2}$$

El cálculo de α no es inmediato porque si bien v es dato, c corresponde al medio perturbado, donde no conocemos los parámetros termodinámicos a priori.

b) Suponemos ahora que α es dato:

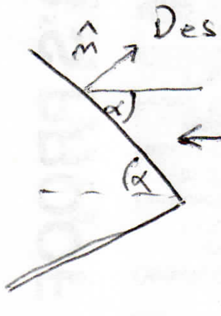


$$\frac{H}{vt} = tg\,\alpha \Rightarrow t = \frac{H}{v\, tg\,\alpha}$$

$$v = M c_1 = 1.5 \sqrt{\frac{\gamma R T_1}{m_{aire}}} \simeq 1.5 \cdot 337 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{t \simeq \frac{3.95 \text{ seg}}{tg\,\alpha}}$$

c) Temperatura T_2: es sólo usar la relación entre T_1 y T_2 dada por Rankine-Hugoniot y donde dice M_1 reemplazar por $M_1 \operatorname{sen}\alpha$:



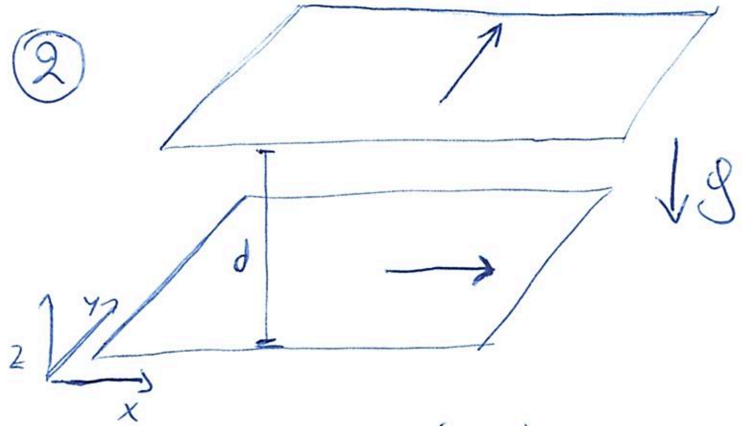
$$v_1 = M_1 c_1 = 1.5\, c_1$$

$$v_{1\perp} = v_1 \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow M_{1\perp} = M_1 \operatorname{sen}\alpha$$

$$T_2 = \overbrace{T_1}^{283.16} \frac{[(\gamma-1) M_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2][2\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha - \gamma + 1]}{(\gamma+1)^2 M_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

②

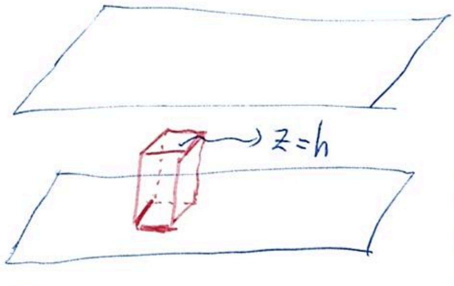
E1	2ºP
07/07/17	



N-S $\quad \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\bar{V} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \nu\left[\nabla^2\bar{V} + \dfrac{1}{3}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{V})\right] - g\hat{z}$

Ahora bien, el fluido es incompresible ($\rho = cte$). Luego, por simetría de traslación en x y en Y, $\bar{V} = \bar{V}(z)$. Además, se genera un flujo laminar, por lo que $\bar{V} = V_x(z)\hat{x} + V_y(z)\hat{y}$.

[Nota: Con esto alcanzaba para "demostrar" la forma de $\bar{V}$. Si quieren confirmar que $v_z = 0$, pueden usar la simetría de traslación en x e Y y la incompresibilidad del fluido en la ecuación de conservación de la masa en el siguiente volumen:



Las caras en X y en Y no aportan a la variación de la masa (lo que entra por una, sale por la opuesta, por simetría de traslación. Quedan las caras en z. En la de abajo no pasa nada porque está el piso. Luego $V_z(z=h)=0$, porque la masa dentro de la caja no varía por incompresibilidad.]

Esto no era necesario

Volviendo,

- $\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$ estacionario
- $(\bar{V}\cdot\bar{\nabla})\bar{V} = (V_x\partial_x + V_y\partial_y)\bar{V}(z) = 0$
- $\nabla p = \partial_z p\,\hat{z}$ simetría de traslación en X e Y
- $\bar{\nabla}\cdot\bar{V} = 0$ incompresible

Entonces, Navier-Stokes queda

$$0 = -\partial_z p \, \hat{z} + \nu \nabla^2 \bar{V} - g \hat{z}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\hat{z}) & 0 = -\partial_z p - g \Rightarrow p(z) = p(z=0) - g z \\ (\hat{x}) & 0 = \nu \, \partial^2_{zz} V_x(z) \Rightarrow \boxed{V_x(z) = A z + B} \\ (\hat{y}) & 0 = \nu \, \partial^2_{zz} V_y(z) \Rightarrow \boxed{V_y(z) = C z + D} \end{array} \right.$$

Por su parte, las condiciones de contorno son

$$\left\{ \begin{array}{llll} \bar{V}(z=0) = u \, \hat{x} & \Rightarrow V_x(z=0) = u & y \quad V_y(z=0) = 0 & \Rightarrow B = u \ y \ D = 0 \\ \bar{V}(z=d) = v \, \hat{y} & \Rightarrow V_x(z=d) = 0 & y \quad V_y(z=d) = v & \Rightarrow A = -\frac{u}{d} \ y \ C = \frac{v}{d} \end{array} \right.$$

Entonces,

$$\bar{V} = u\left(1 - \frac{z}{d}\right)\hat{x} + v \frac{z}{d} \hat{y}$$

b) La fuerza que hace la superficie plana S de fluido que está pegada al techo es $\iint_S \bar{\bar{\sigma}} \cdot \underset{\downarrow \atop +\hat{z}}{\hat{n}} \, ds$. O sea, la fuerza por unidad de superficie

es $\bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{z}$.

Ahora bien, $\bar{\bar{\sigma}}$ es un tensor de rango 2, definido de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \mu\left(\partial_i V_j + \partial_j V_i - \frac{2}{3} \cancel{\underbrace{\partial_j V_j}_{=0, \text{ tanto si } j = x, y \text{ ó } z.}} \delta_{ij}\right)$$

Como sólo nos importa la parte viscosa, tiramos el primer término.

Luego,

$$\sigma'_{ij} = \mu\left(\partial_i V_j + \partial_j V_i\right) \Rightarrow \sigma'_{ij} \cdot \underset{\hat{n} = (0,0,1)}{n_j} = \mu\left(\cancel{\partial_i V_z} + \partial_z V_i\right) = \mu \, \partial_z V_i$$

Entonces,

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{n} = \mu \, \partial_z \bar{V}$$

Como lo que queremos es la fuerza que le hace el techo al fluido, por acción-reacción, $\boxed{\bar{f}_s = -\bar{\bar{\sigma}}\cdot\hat{n} = -\mu\,\partial_z\bar{v}} = \mu\frac{\mu}{d}\hat{x} - \mu\frac{v}{d}\hat{y}$

E1	2ºP
07/07/17	

(c) Podemos pensar a ~~la~~ situación como la superposición de una situación estacionaria y una transitoria.

$$\bar{v} = \bar{v}_e(z) + \bar{v}_t(x,y,z,t).$$

Por los mismos argumentos, esperamos que $\bar{v}_t = \bar{v}_t(z,t) = v_{tx}(z,t)\hat{x} + v_{ty}(z,t)\hat{y}$.

Luego,

$$\frac{\partial(\bar{v}_e + \bar{v}_t)}{\partial t} + \cancel{(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v}} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\nabla^2(\bar{v}_e + \bar{v}_t) - g\hat{z}$$

$$(0) + (\partial_t\bar{v}_t) = \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\nabla^2\bar{v}_e - g\hat{z}\right) + (\nu\,\nabla^2\bar{v}_t)$$

Entonces, podemos separar la parte estacionaria (ya resuelta) por un lado, y la transitoria por otro. De esta forma, lo que queda por resolver es

$$\boxed{\partial_t\bar{v}_t = \nu\,\nabla^2\bar{v}_t} \quad \begin{cases} (\hat{z}) & 0 = 0 \\ (\hat{x}) & \partial_t v_{tx}(z,t) = \nu\,\partial^2_{zz} v_{tx}(z,t) \quad \boxed{1} \\ (\hat{y}) & \partial_t v_{ty}(z,t) = \nu\,\partial^2_{zz} v_{ty}(z,t) \quad \boxed{2} \end{cases}$$

En cuanto a las condiciones de contorno, deben ser tales que las de $\bar{v}(z,t) = \bar{v}_e(z) + \bar{v}_t(z,t)$ sean las correctas. Entonces,

$$\text{cdc}\begin{cases} \bar{v}_t(z=0, t>0) = 0 \\ \bar{v}_t(z=d, t>0) = 0 \\ \bar{v}_t(z, t=0) = -\bar{v}_e(z) \end{cases}$$

Lo propuesto para resolver $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ es utilizar separación de variables, es decir, proponer $v_{tx}(z,t) = \alpha(z)\cdot\beta(t)$ y $v_{ty}(z,t) = \gamma(z)\cdot\delta(t)$

De esta forma, desarrollando, como ejemplo, la ecuación $\boxed{1}$,

$$\partial_t V_{tx}(z,t) = \nu\, \partial^2_{zz} V_{tx}(z,t)$$

$$\alpha(z)\, \beta'(t) = \nu\, \alpha''(z)\, \beta(t)$$

$$\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \nu \frac{\alpha''(z)}{\alpha(z)} = \text{constante} = -k^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha(z) = A e^{ikz} + B e^{-ikz} \\ \beta(t) = C e^{-k^2 t} \end{cases}$$

~~Como~~

Como $V_{tx}(z=0, t>0) = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow \alpha = A \cdot 2i \cdot \frac{e^{ikz} - e^{-ikz}}{2i} = \underbrace{2iA}_{=D} \operatorname{sen}(k$

Como $V_{tx}(z=d, t>0) = 0 \Rightarrow k \cdot d = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{d}$

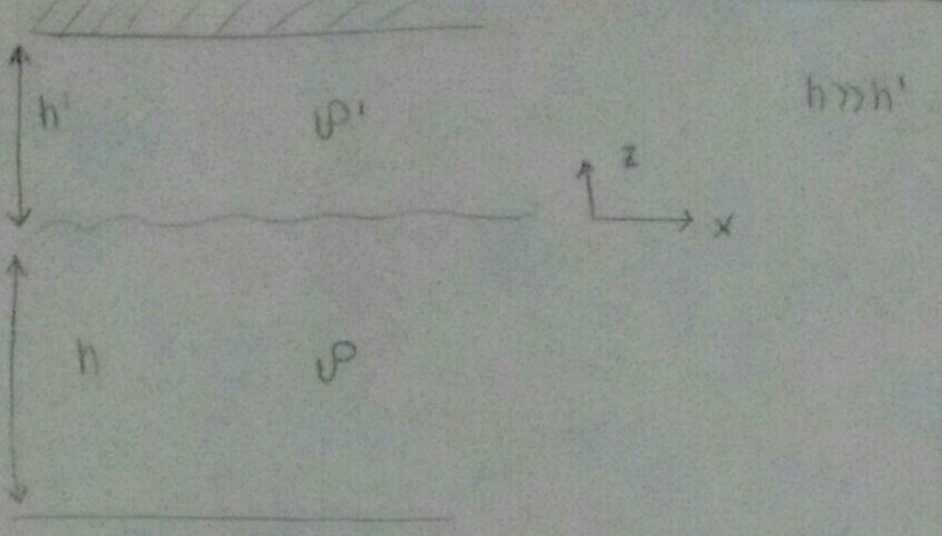
Entonces, $V_{tx}(z,t) = \sum_n \underbrace{E_n}_{= D_n \cdot C_n} \operatorname{sen}(k_n z)\, e^{-k_n^2 t}$

Equivalentemente, $V_{ty}(z,t) = \sum_m F_m \operatorname{sen}(l_m z)\, e^{-l_m^2 t}$, $l_m = \frac{m\pi}{d}$.

Luego, $\bar{V}_t(z,t) = \left(\sum_n E_n \operatorname{sen}(\underbrace{k_{xn}}_{=\frac{n\pi}{d}} z)\, e^{-k_{xn}^2 t}\right)\hat{x} + \left(\sum_m F_m \operatorname{sen}(\underbrace{k_{ym}}_{=\frac{m\pi}{d}} z)\, e^{-k_{ym}^2 t}\right)\hat{y}$

Para hallar los E_n, F_m, aprovechamos que podemos ~~[illegible]~~ separar el flujo en su componente en x y en su componente en y, y utilizando $\bar{V}_t(z, t=0) = -\bar{V}_e(z)$ resolvemos normalmente la serie de Fourier.

Esto no era necesario.



Hipótesis $\bar{\nabla}\times\bar{u} = 0$ (irrotacional) (1)

$\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$ (incompresible) (2)

De (1) $\Rightarrow \bar{u} = \bar{\nabla}\phi$

De (2) $\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi = 0$

El potencial de velocidad ϕ cumple la ecuación de Laplace $\boxed{\nabla^2\phi = 0}$

En este problema llamo $\phi'(x,z,t)$ al potencial en la parte superior y $\phi(x,z,t)$ al potencial en la parte inferior

Condiciones de contorno

- En $z = h'$ la velocidad normal al contorno debe ser nula

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right|_{z=h'} = 0 \qquad (a)$$

- Para $z \to -\infty$ la velocidad debe caer a cero (b)

$$\lim_{h\to-\infty} \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=h} \to 0$$

Condiciones en la interfase.

- Continuidad de la velocidad normal a la interfaz

$$\left.\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} \qquad (c)$$

- Continuidad de la presión

$$\left[g(\rho-\rho')\frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho'\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right]\Bigg|_{z=0} = 0 \qquad (d)$$

Proponemos las siguientes soluciones.

$$\phi'(x,z,t) = f(z)\cos(kx-wt)$$

$$\phi(x,z,t) = g(z)\cos(kx-wt)$$

Reemplazando en Laplace $\left.\begin{array}{l}\nabla^2\phi = 0\\ \nabla^2\phi' = 0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}f''(z) = k^2 f(z)\\ g''(z) = k^2 g(z)\end{array}$

$$\Rightarrow f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

$$g(z) = Ce^{kz} + De^{-kz}$$

Aplicamos las condiciones de contorno (a) y (b)

(a) $$\frac{\partial\phi'}{\partial z} = k(Ae^{kz} - Be^{-kz})\cos(kx-wt)$$

$$\left.\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right|_{z=h'} = k(Ae^{kh'} - Be^{-kh'})\cos(kx-wt) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = Be^{-2kh'}}$$

(b) $$\frac{\partial\phi}{\partial z} = k(Ce^{kz} - De^{-kz})$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z\to-\infty} = -kDe^{-kz} = 0 \Rightarrow \boxed{D=0}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\phi'(x,z,t) = B(e^{-2kh'}e^{kz} + e^{-kz})\cos(kx-wt)\\ \quad = Be^{-kh'}(e^{-kh'}e^{kz} + e^{kh'}e^{-kz})\cos(kx-wt)\\ \quad = 2Be^{-kh'}\cosh k(z-h')\cos(kx-wt)\\ \phi(x,z,t) = Ce^{kz}\cos(kx-wt)\end{array}\right.$$

Condiciones en la interfase

(c) $$2Be^{-kh'}k\sinh k(-h')\cos(kx-wt) = Ck\cos(kx-wt)$$

$$\Rightarrow C = -2Be^{-kh'}\sinh kh'$$

$$g(\rho-\rho')\left[-2Bk\cancel{e^{-kh'}} \operatorname{senh} kh' \cancel{\cos(kx-wt)}\right]$$

$$+\rho\,\cancel{2Be^{-kh'}} \operatorname{senh} kh'\, w^2 \cancel{\cos(kx-wt)} + \rho'\,\cancel{2Be^{-kh'}} \cosh kh'\, w^2 \cancel{\cos(kx-wt)} = 0$$

$$w^2(\rho \operatorname{senh} kh' + \rho' \cosh kh') = kg(\rho-\rho') \operatorname{senh} kh'$$

$$\boxed{w^2 = \frac{kg(\rho-\rho') \operatorname{senh} kh'}{\rho \operatorname{senh} kh' + \rho' \cosh kh'}}$$

Expresión para la interfase perturbada $\xi(x,t)$

$$\xi(x,t) = \frac{-1}{g(\rho-\rho')}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho'\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$\xi(x,t) = \frac{-1}{g(\rho-\rho')}\left[w\rho 2Be^{-kh'} \operatorname{senh} kh' \operatorname{sen}(kx-wt) - w\rho' 2Be^{-kh'} \cosh kh' \operatorname{sen}(kx-wt)\right]$$

$$\xi(x,t) = \frac{w\,2Be^{-kh'}}{g(\rho-\rho')}\left[\rho \operatorname{senh} kh' + \rho' \cosh kh'\right] \operatorname{sen}(kx-wt)$$