

# Apuntes de Estructura de la Materia 1

Fernando O. Minotti

2do cuatrimestre de 2018

# Índice general

<b>1. Cinemática de medios continuos</b>	<b>4</b>
1.1. Descripciones Lagrangiana y Euleriana . . . . .	4
1.2. Derivada material . . . . .	5
1.3. Distintos tipos de visualización . . . . .	6
1.3.1. Líneas de corriente . . . . .	6
1.3.2. Trayectorias . . . . .	7
1.3.3. Líneas de traza . . . . .	7
1.4. Deformación en un campo de velocidades . . . . .	8
<b>2. Dinámica de medios continuos</b>	<b>12</b>
2.1. Masa . . . . .	13
2.2. Cantidad de movimiento . . . . .	13
2.3. Momento angular . . . . .	15
2.4. Energía . . . . .	16
2.5. Conjunto completo de ecuaciones . . . . .	17
2.6. Hidrostática . . . . .	18
<b>3. Relaciones constitutivas</b>	<b>21</b>
<b>4. Teoremas generales</b>	<b>29</b>
4.1. Teoremas de Bernoulli . . . . .	30
4.2. Teoremas de la vorticidad . . . . .	32
4.2.1. Teorema de evolución de la vorticidad . . . . .	34
4.2.2. Teorema de Kelvin . . . . .	36
4.2.3. Teoremas de Helmholtz . . . . .	38
4.2.4. Teorema de Ertel (sistemas rotantes) . . . . .	39
<b>5. Flujo compresible estacionario</b>	<b>43</b>
<b>6. Flujo compresible no estacionario</b>	<b>50</b>
6.1. Características . . . . .	50

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
6.2. Ondas de choque . . . . .	56
<b>7. Flujo 2-D incompresible</b>	<b>65</b>
7.1. Aplicación a la ecuación de Navier-Stokes . . . . .	67
7.1.1. Problema de Stokes . . . . .	70
<b>8. Flujo 2-D potencial</b>	<b>73</b>
8.1. Teorema de Blasius . . . . .	81
8.2. Teorema de Kutta-Joukowski . . . . .	83
<b>9. Teorema <math>\Pi</math></b>	<b>86</b>
<b>10. Capa límite</b>	<b>88</b>
<b>11. Ondas e inestabilidades</b>	<b>93</b>
11.1. Tensión superficial . . . . .	93
11.2. Oscilaciones e inestabilidades de interfases . . . . .	94
11.2.1. Recinto ilimitado . . . . .	97
11.2.2. Ondas de gravedad-inestabilidad de Rayleigh-Taylor . . . . .	99
11.2.3. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz . . . . .	100
11.3. Ondas en medios dispersivos . . . . .	101
11.4. Inestabilidad de flujos con cizalladura . . . . .	108
11.4.1. Teorema de Squire . . . . .	111
11.4.2. Teorema de Rayleigh del punto de inflexión . . . . .	111

# Capítulo 1

## Cinemática de medios continuos

### 1.1. Descripciones Lagrangiana y Euleriana

Consideremos aceptada la noción abstracta de partícula de fluido que conserva su identidad al moverse, y a la que son aplicables las leyes de conservación básicas (masa, cantidad de movimiento, momento angular y energía). Una partícula fluida infinitesimal estará caracterizada en forma natural por su posición y por sus propiedades termodinámicas (volumen, densidad, temperatura, presión, energía interna, entropía, etc.), dadas en función del tiempo. La identificación de cada partícula puede hacerse convenientemente a través de la posición  $\mathbf{x}_0$  que ocupaba en un instante característico  $t_0$ . De esta manera, la posición en un instante  $t$  de la partícula “ $\mathbf{x}_0$ ” será

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0); \tag{1.1}$$

su velocidad es, por supuesto, la derivada de esta función respecto de  $t$ , manteniendo  $\mathbf{x}_0$  fijo, esto es, refiriéndose siempre a la misma partícula:

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Análogamente, puede determinarse su aceleración  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}_0) = \partial \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) / \partial t$ , y caracterizar sus otras propiedades como volumen  $\delta V(t, \mathbf{x}_0)$ , masa  $\delta M(t, \mathbf{x}_0)$ , densidad  $R(t, \mathbf{x}_0) = \delta M(t, \mathbf{x}_0) / \delta V(t, \mathbf{x}_0)$ , temperatura  $\mathcal{T}(t, \mathbf{x}_0)$ , etc.. Esta descripción, que es la extensión natural de la cinemática de partículas discretas a medios continuos, es la denominada material o Lagrangiana. Describir la propiedad de un medio continuo de esta manera es dar la misma como función de todas las posiciones de referencia  $\mathbf{x}_0$  de interés y de todos los instantes  $t$  que se requieran.

Existe una descripción alternativa, que es la de campos o Euleriana, en la cual se da, para cada instante  $t$  requerido, no ya el valor de la propiedad que tiene en ese instante la partícula que estuvo en  $\mathbf{x}_0$  en  $t_0$ , sino el de la partícula que está en la posición  $\mathbf{x}$  en el propio instante  $t$ , y esto se hace para todos los  $\mathbf{x}$  de interés. En esta descripción el “campo” de velocidades será una función  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , el de densidades  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , etc. (se ve ahora la convención de usar tipos de letra distintos para las distintas descripciones). Quede claro entonces que, por ejemplo,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  es la velocidad de la partícula que está pasando por  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ .

Ambas descripciones son equivalentes. En efecto, si se conoce la descripción Lagrangiana de un medio, la Euleriana está dada por (para una magnitud genérica  $A(t, \mathbf{x}_0)$ )

$$a(\mathbf{x}, t) = A(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{x})), \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x})$  es la función que resulta de resolver para  $\mathbf{x}_0$  la condición

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}, \quad (1.4)$$

que relaciona la posición original  $\mathbf{x}_0$  con la actual  $\mathbf{x}$ . Por la condición de identidad de las partículas, la relación (1.4) es biyectiva y por lo tanto siempre invertible.

Análogamente, si se tiene la descripción Euleriana de un medio, la correspondiente Lagrangiana resulta como

$$A(t, \mathbf{x}_0) = a(\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0), t), \quad (1.5)$$

donde debe haberse resuelto previamente para  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$  la identidad

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\mathbf{X}(t', \mathbf{x}_0), t') dt', \quad (1.6)$$

que resulta de integrar la relación evidente

$$\frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0), t).$$

En general, la inversión de (1.4) o la resolución de la ecuación integral (1.6) sólo puede efectuarse en la práctica en configuraciones muy sencillas; sin embargo es posible en principio.

## 1.2. Derivada material

Como las leyes básicas de conservación se aplican a cada partícula material de fluido, es de fundamental interés determinar cómo cambian con el

tiempo las distintas propiedades de una dada partícula fluida. Así, por ejemplo, podremos decir que la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella, la variación de su energía (cinética más interna) al trabajo de las fuerzas aplicadas, etc.. Para el caso de la descripción Lagrangiana la respuesta es trivial:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Nótese el empleo del signo de derivada total para representar la variación de la propiedad  $A$  de una dada partícula.

En el caso de descripción Euleriana, debemos “seguir” a la partícula en cuestión, al menos por un tiempo pequeño, para ver cómo cambian sus propiedades. Si en el instante  $t$  la partícula se encuentra en  $\mathbf{x}$  y tiene por lo tanto velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  y propiedad  $a(\mathbf{x}, t)$ , en el instante  $t + \Delta t$  se encontrará en  $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t$  y tendrá entonces la propiedad  $a(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t, t + \Delta t)$ ; esto es

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [a(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t, t + \Delta t) - a(\mathbf{x}, t)] \\ &= \frac{\partial a}{\partial t} + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla a, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde se ha usado un desarrollo de Taylor en la primera línea para pasar a la segunda.

El mismo resultado puede obtenerse directamente de (1.7) derivando (1.5) junto con (1.6) (la idea, por supuesto, es la misma).

Quede entonces claro que con (1.8) estamos calculando lo que le ocurre a una dada partícula material (de ahí el uso de la notación  $d/dt$ ) usando una descripción de campo.

### 1.3. Distintos tipos de visualización

Una descripción cualitativa del movimiento de un medio continuo, de enorme importancia práctica, está dada por distintos elementos fácilmente visualizables.

#### 1.3.1. Líneas de corriente

Son las líneas que en un instante dado son tangentes en cada uno de sus puntos al campo de velocidad. Esto es, en un dado  $t$  el diferencial de

longitud de esta línea  $d\mathbf{l}$  en el punto  $\mathbf{x}$  es paralelo al campo de velocidad en dicho punto:

$$d\mathbf{l} = \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.9)$$

a través de un factor escalar infinitesimal  $\varepsilon$ . Escribiendo (1.9) en componentes y eliminando entre estas ecuaciones a  $\varepsilon$  obtenemos la expresión de las líneas de corriente

$$\frac{dx}{u_x(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{u_y(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{u_z(\mathbf{x}, t)},$$

que pueden integrarse conocido el campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  para determinar las líneas en cada instante. Experimentalmente son difíciles de determinar; usualmente se las visualiza poniendo un gran número de hilos o flecos cortos muy flexibles y livianos, fijos en uno de sus extremos.

### 1.3.2. Trayectorias

Corresponden a las trayectorias descritas a medida que transcurre el tiempo por partículas de fluido. A diferencia de las líneas de corriente no dan una visualización instantánea, sino indican cómo ha evolucionado el flujo. Su expresión matemática está dada muy simplemente en la descripción Lagrangiana por la curva  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$  descrita al transcurrir el tiempo. Por cada  $\mathbf{x}_0$  se tiene una de estas curvas, y un conjunto de ellas da información cualitativa del flujo.

Experimentalmente pueden obtenerse marcando con un colorante algunas partículas de fluido en  $t_0$  y fotografiando su evolución con el obturador de la cámara abierto.

### 1.3.3. Líneas de traza

Son las más sencillas de obtener experimentalmente, dejando escapar colorante en puntos fijos del espacio. Cuando una partícula pasa por allí se tiñe y si uno observa en un dado instante  $t$ , ve líneas formadas por todas las partículas que en algún instante anterior pasaron por alguno de los puntos donde se inyecta colorante; éstas son las líneas de traza en el instante considerado.

Matemáticamente son algo más difíciles de obtener que las líneas anteriores. Imagínese que en  $\mathbf{x}_c$  se está inyectando colorante. En un dado  $t$ , la línea de traza correspondiente estará formada por la posición en ese instante de todas las partículas que pasaron por  $\mathbf{x}_c$  en tiempos anteriores. Esto es más sencillo de determinar usando la descripción Lagrangiana; si  $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}_c, t')$  es la posición en  $t_0$  de la partícula que en  $t'$  estará en  $\mathbf{x}_c$ , la línea de traza estará

dada en  $t$  por la curva  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0(\mathbf{x}_c, t'))$  descripta al variar  $t'$  entre el instante en que se comenzó a inyectar colorante y el tiempo  $t$ . Para determinar  $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}_c, t')$  debe invertirse la relación  $\mathbf{x}_c = \mathbf{X}(t', \mathbf{x}_0)$ .

Una propiedad importante es que líneas de corriente, de traza y trayectorias coinciden si el flujo es estacionario (y sólo en ese caso); esto es, depende del espacio pero no del tiempo:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Pruebe esta afirmación como ejercicio.

## 1.4. Deformación en un campo de velocidades

Otra forma de conceptualizar el movimiento de un medio continuo es analizar, en un instante fijo, la diferencia del campo de velocidades en dos puntos cercanos; en componentes cartesianas,

$$du_i = u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = S_{ik} dx_k + \Omega_{ik} dx_k, \quad (1.10)$$

donde se ha usado la identidad

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

y se han definido los tensores simétrico y antisimétrico, respectivamente,

$$\begin{aligned} S_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \\ \Omega_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Consideremos primero a  $\Omega_{ik}$ ; usando la identidad entre densidades tensoriales de Levi-Civita y deltas de Kronecker (usamos la convención de Einstein de sumar sobre índices repetidos)

$$\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jlm} = \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (1.11)$$

podemos escribir

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ikm} \omega_m, \quad (1.12)$$

donde se usó la expresión del rotor del campo de velocidades, denominada vorticidad,

$$\omega_m \equiv (\nabla \times \mathbf{u})_m = \varepsilon_{ljm} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}.$$

El último término de (1.10) es entonces

$$\Omega_{ik}dx_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\omega_m dx_k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x})_i,$$

que corresponde a la diferencia de velocidades generada por una rotación rígida con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}/2$ .

¿A qué corresponde el término  $S_{ik}dx_k$ ? Un elemento de fluido que en  $t$  coincide con  $d\mathbf{x}$ , en  $t+dt$  se habrá transformado en  $d\mathbf{x}+d\mathbf{u} dt$ , en particular, su longitud (al cuadrado)  $ds^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$  habrá cambiado a (despreciando términos de orden superior al orden tres)

$$(d\mathbf{x} + d\mathbf{u} dt) \cdot (d\mathbf{x} + d\mathbf{u} dt) = ds^2 + 2d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{u} dt,$$

con lo que la longitud propiamente dicha  $ds$  habrá cambiado a

$$ds + \frac{d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{u} dt}{ds}. \quad (1.13)$$

Usando (1.10)

$$d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{u} = dx_i du_i = S_{ik}dx_i dx_k, \quad (1.14)$$

el término con  $\Omega_{ik}$  se anuló al contraer el tensor antisimétrico  $\Omega_{ik}$  con el simétrico  $dx_i dx_k$ . De esta manera, para un elemento orientado según la coordenada 1 se tiene que su longitud varió en  $S_{11}ds dt$ ; esto es,  $S_{11}$  da la variación relativa y por unidad de tiempo de la longitud de un elemento fluido orientado en la dirección 1. Lo análogo sucede con los otros dos términos diagonales. Si  $S_{11}$  es positivo el elemento se estira y si es negativo se contrae.

Para ver el efecto de los términos no diagonales consideremos el ángulo entre dos elementos de fluido  $d\mathbf{x}$  y  $d\mathbf{x}'$

$$\cos \alpha = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}'}{ds ds'},$$

que cambiará en un  $dt$  a

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + d\alpha) &= \cos \alpha - \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{(d\mathbf{x} + d\mathbf{u} dt) \cdot (d\mathbf{x}' + d\mathbf{u}' dt)}{\left(ds + \frac{d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{u} dt}{ds}\right) \left(ds' + \frac{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{u}' dt}{ds'}\right)}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde se ha usado (1.13). Si los dos elementos formaban originalmente un ángulo de  $90^\circ$ , por ejemplo con uno orientado en la dirección 1 y el otro en la 2, de (1.15) y (1.14) el cambio en el ángulo entre los elementos es

$$d\alpha = -\frac{2S_{12}dt}{(1 + S_{11}dt)(1 + S_{22}dt)} = -2S_{12}dt.$$

Note que los términos con  $\Omega_{ik}$  se cancelan (como corresponde a una rotación rígida). Los términos no diagonales dan entonces lugar a una rotación diferencial (no rígida) de elementos de fluido, lo que podemos denominar torsión.

El tensor  $S_{ik}$  produce entonces una deformación por estiramiento y torsión por unidad de tiempo, y es denominado tensor de velocidad de deformación.

Notablemente, el efecto de estiramiento (o contracción) según los ejes cartesianos fijos al espacio, dado por los elementos diagonales, combinado con la torsión producida por los elementos no diagonales, puede reducirse a un efecto de estiramiento y/o contracción puros, pero no ya según los ejes cartesianos fijos, sino según tres ejes perpendiculares entre sí, pero que varían punto a punto (e instante a instante). Esto se ve inmediatamente considerando que  $S_{ik}$  es un tensor simétrico y real, por lo que es siempre diagonalizable, con los ejes principales correspondientes perpendiculares entre sí.

De esta manera, sumando todas las contribuciones, un elemento de fluido, a la vez que se traslada con su correspondiente velocidad  $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0)$ , sufre también una rotación rígida con velocidad angular dada por  $\boldsymbol{\omega}/2$ , más un estiramiento y/o contracción según tres ejes principales (determinables diagonalizando localmente a  $S_{ik}$ ). Esto es conocido como el teorema fundamental de la cinemática de medios continuos.

Para finalizar, consideremos cómo cambia el volumen de un elemento fluido en la evolución del mismo. Imaginemos un pequeño elemento de volumen en forma de paralelepípedo que en  $t_0$  tiene lados  $d\mathbf{x}_0$ ,  $d\mathbf{x}'_0$  y  $d\mathbf{x}''_0$ . El volumen correspondiente está dado por el producto mixto de los tres vectores

$$\delta V_0 = d\mathbf{x}_0 \cdot (d\mathbf{x}'_0 \times d\mathbf{x}''_0). \quad (1.16)$$

Utilizando la descripción Lagrangiana es fácil ver cómo varía este volumen. Para esto consideremos por ejemplo el elemento  $d\mathbf{x}_0$ ; en  $t_0$  un extremo se encuentra en  $\mathbf{x}_0$  y el otro en  $\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0$ ; en el instante  $t$ , un extremo se encontrará en  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$  y el otro en  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0)$ , esto es, el elemento  $d\mathbf{x}_0$  se habrá transformado en (en componentes cartesianas)

$$dX_i = X_i(t, \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0) - X_i(t, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial X_i}{\partial x_{0k}} dx_{0k}, \quad (1.17)$$

con expresiones análogas para  $d\mathbf{X}'$  y  $d\mathbf{X}''$ . El elemento de volumen en  $t$  será entonces

$$\delta V = d\mathbf{X} \cdot (d\mathbf{X}' \times d\mathbf{X}''). \quad (1.18)$$

Vemos de (1.17) y (1.18) que podemos considerar el cambio de volumen como el debido a la transformación de la variable  $\mathbf{x}_0$  a la  $\mathbf{X}$ , con lo que la relación entre los volúmenes  $\delta V_0$  y  $\delta V$  está dada por el Jacobiano de dicha

transformación

$$\delta V = J\delta V_0 = \frac{\partial (X_1, X_2, X_3)}{\partial (x_{01}, x_{02}, x_{03})} \delta V_0. \quad (1.19)$$

En variables Eulerianas podemos usar lo deducido antes; la rotación rígida no cambia el volumen de una partícula de fluido, pero sí las contracciones y expansiones dadas por el tensor  $S_{ik}$ . Considerando un pequeño elemento de lados paralelos a los tres ejes principales correspondientes en ese punto en el instante  $t$ ; su volumen es  $\delta V(t) = dx_1 dx_2 dx_3$ , y sabemos por (1.13) y (1.14) que en  $t + dt$  tendrá un volumen

$$\begin{aligned} \delta V(t + dt) &= (dx_1 + S_{11} dx_1 dt)(dx_2 + S_{22} dx_2 dt)(dx_3 + S_{33} dx_3 dt) \\ &= dx_1 dx_2 dx_3 [1 + (S_{11} + S_{22} + S_{33}) dt] \\ &= \delta V(t) (1 + S_{ii} dt), \end{aligned}$$

de manera que podemos escribir (verifique que  $S_{ii}$  es la divergencia del campo de velocidades)

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = S_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

La variación relativa del volumen depende de la traza de  $S_{ik}$ , que es un invariante ante transformaciones ortogonales, por lo que puede calcularse con la expresión de  $S_{ik}$  original, no reducida a su forma diagonal.

Por otro lado, si derivamos (1.19) respecto del tiempo, usando que  $\delta V_0$  es constante, tenemos

$$\frac{d\delta V}{dt} = \frac{dJ}{dt} \delta V_0 = \frac{dJ}{dt} \frac{\delta V}{J},$$

que, al comparar con (1.20), nos da la fórmula de expansión de Euler

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

## Capítulo 2

# Dinámica de medios continuos

Imagínese un volumen móvil  $V(t)$  dentro de un medio continuo; este volumen es una abstracción matemática y no está necesariamente formado siempre por las mismas partículas de fluido; esto es, no es un volumen material: el fluido puede atravesar su superficie  $S(t)$ , la cual se mueve con velocidad (local)  $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t)$  distinta en general de la velocidad del fluido  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Si consideramos un campo genérico integrado sobre este volumen

$$F(t) = \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (2.1)$$

su variación temporal estará dada por

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) d^3x - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d^3x \right]. \quad (2.2)$$

Haciendo un desarrollo de Taylor en el integrando de la primera integral podemos escribir

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t) d^3x - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) d^3x + \Delta t \int_{V(t+\Delta t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3x \right].$$

La diferencia de las dos primeras integrales es igual a la integral de  $f(\mathbf{x}, t)$  sobre el volumen diferencia de ambos volúmenes, que puede escribirse como el volumen “barrido” por la superficie  $S(t)$  en el tiempo  $\Delta t$ ; esto es (tén-gase en cuenta que la distancia barrida por la superficie es proporcional a la componente **normal** de la velocidad de la superficie),

$$dV = dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s \Delta t,$$

con lo cual tenemos finalmente

$$\frac{dF}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3x + \int_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.3)$$

Si consideramos ahora que el volumen es material, entonces  $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  y las partículas que lo conforman son siempre las mismas. Para este caso podemos escribir (2.3), usando la definición de derivada material (1.8), como

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}) \right] d^3x = \\ &= \int_{V(t)} \left[ \frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} + f(\mathbf{x}, t)\nabla \cdot \mathbf{u} \right] d^3x, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde se aplicó el teorema de Gauss para escribir la segunda línea, que es una expresión útil, alternativa a la de la primera línea.

Ahora es sencillo escribir las leyes de conservación aplicando (2.4).

## 2.1. Masa

Tomando  $f(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $F$  corresponde a la masa  $M$  del volumen que debe conservarse en el movimiento de éste:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{V(t)} \left[ \frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t)\nabla \cdot \mathbf{u} \right] d^3x = 0.$$

Como esto debe ser cierto para cualquier volumen  $V$ , concluimos que la conservación de la masa implica

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t)\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.5)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}] = 0. \quad (2.6)$$

## 2.2. Cantidad de movimiento

Tomando  $f(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $F$  corresponde a la cantidad de movimiento  $\mathbf{P}$  del volumen, que sólo puede cambiar debido a las fuerzas externas que actúan sobre éste. Estas fuerzas las dividimos en aquellas que actúan en volumen, que son fuerzas de largo alcance como fuerzas gravitatorias y electromagnéticas, y las que actúan por contacto, que ejercen los elementos de fluido inmediatamente fuera del volumen, sobre la superficie de éste (fuerzas moleculares de corto alcance y/o intercambio microscópico de cantidad de

movimiento sin intercambio neto de masa). La fuerza que sufre un elemento  $\delta V$  interno es debida sólo a las fuerzas de volumen y la escribimos como  $\delta \mathbf{F} = \mathbf{f}_V \delta V$ , donde  $\mathbf{f}_V$  es la fuerza de volumen externa por unidad de volumen. Un elemento perisférico  $\delta V$  que presenta un área  $\delta S$  en contacto con elementos exteriores ( $\delta S$ , por supuesto, forma parte de  $S(t)$ ), sufre además de la fuerza de volumen  $\mathbf{f}_V \delta V$ , una fuerza externa de superficie  $\mathbf{t} \delta S$ , con  $\mathbf{t}$  la fuerza de contacto por unidad de superficie, también llamada esfuerzo.

De esta manera escribimos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \int_{V(t)} \left[ \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] d^3x \\ &= \int_{V(t)} \mathbf{f}_V d^3x + \int_{S(t)} \mathbf{t} dS. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tomemos como  $V(t)$  a un pequeño tetraedro (denominado tetraedro de Cauchy), tres de cuyas caras se encuentran sobre los planos coordenados cartesianos, con normales  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{e}_3$ , con  $\mathbf{e}_i$  los versores cartesianos, mientras que la cuarta cara tiene normal  $\mathbf{n}$ . Llamando  $\Delta S_0$  a la superficie de esta cuarta cara, y  $h_0$  a la altura del tetraedro, digamos, sobre la coordenada 1; el volumen del tetraedro es entonces  $\Delta V_0 = 1/3 h_0 \Delta S_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1$ . Aplicando (2.7) las integrales de volumen son proporcionales a  $\Delta V_0 \sim h_0 \Delta S_0$ , mientras que la integral de superficie tiene el valor (la superficie de cada cara sobre un plano coordenado es  $\Delta S_i = \Delta S_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$ )

$$\left[ \mathbf{t}^{(n)} + \mathbf{t}^{(n_1)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{t}^{(n_2)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{t}^{(n_3)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \Delta S_0,$$

donde  $\mathbf{t}^{(n_i)}$  es el esfuerzo sobre la superficie con normal  $\mathbf{n}_i$ .

Si cada dimensión lineal del tetraedro se contrae en un factor  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ), el volumen pasará a valer  $\Delta V = \lambda^3 \Delta V_0$ , y la superficie  $\Delta S = \lambda^2 \Delta S_0$ . Dividiendo la ecuación resultante por  $\Delta S$  y tendiendo al límite  $\lambda \rightarrow 0$  (el tetraedro tiende a cero su volumen manteniendo la forma), resulta la condición

$$\mathbf{t}^{(n)} + \mathbf{t}^{(n_1)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{t}^{(n_2)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{t}^{(n_3)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (2.8)$$

Ahora bien, si consideramos un elemento de superficie  $\delta S$  con normal  $\mathbf{n}$ , la fuerza que la partícula de fluido que es “pinchada” por la normal hace sobre la superficie es  $\mathbf{t}^{(n)} \delta S$ , mientras que la fuerza que hace sobre esta misma superficie la partícula que está del otro lado de ella es  $\mathbf{t}^{(-n)} \delta S$ , lo que es claro pues la normal correspondiente a este lado es  $-\mathbf{n}$ . Como dicha superficie tiene masa nula la fuerza neta sobre ella debe ser cero, con lo que

$$\mathbf{t}^{(-n)} = -\mathbf{t}^{(n)}.$$

Aplicando esta condición a (2.8), y usando que  $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_i$ , resulta

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(e_1)} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t}^{(e_2)} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t}^{(e_3)} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}, \quad (2.9)$$

que nos dice que, para calcular el esfuerzo correspondiente a una superficie con normal arbitraria  $\mathbf{n}$ , basta conocer el valor de los esfuerzos correspondientes a normales según tres ejes cartesianos fijos. Con notación indicial, si llamamos  $T_{ij}$  a la componente  $i$  del esfuerzo correspondiente a normal  $\mathbf{e}_j$ , esto es,

$$T_{ij} = t_i^{(e_j)},$$

podemos escribir (2.9) como

$$t_i^{(n)} = T_{ij} n_j. \quad (2.10)$$

Un punto esencial de  $T_{ij}$  es que, por corresponder a esfuerzos sobre superficies con normales fijas, no depende del  $\mathbf{n}$  en cuestión y  $\mathbf{t}^{(n)}$  resulta entonces una función lineal de  $\mathbf{n}$ . Además,  $T_{ij}$  es un tensor, por ser un vector ( $\mathbf{t}^{(n)}$ ) su contracción con un vector ( $\mathbf{n}$ ), llamado tensor de esfuerzos. Usando (2.10) escribimos

$$\int_{S(t)} t_i^{(n)} dS = \int_{S(t)} T_{ij} n_j dS = \int_{V(t)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} d^3x,$$

donde se usó el teorema de Gauss para la última igualdad. Con esto escribimos (2.7) como

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f}_V - \nabla \cdot \mathbf{T} \right] d^3x = 0,$$

que, por ser el volumen arbitrario conduce a la ecuación

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}_V + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.11)$$

que, a su vez, efectuando la derivada material y usando (2.5) se escribe más sencillamente como

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_V + \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (2.12)$$

## 2.3. Momento angular

Tomando  $f(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $F$  corresponde al momento angular (respecto del origen de coordenadas)  $\mathbf{M}$  del volumen, que cambia en el tiempo debido al momento de las fuerzas externas (respecto al mismo origen);

usando la expresión en la primera línea de (2.3) escribimos en componentes cartesianas

$$\begin{aligned}\frac{dM_i}{dt} &= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho x_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho x_j u_k u_l) \right] d^3x \\ &= \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk} x_j f_{Vk} d^3x + \int_{S(t)} \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl} n_l dS.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al último término y usando que el volumen es arbitrario, deducimos la ecuación

$$\varepsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho x_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho x_j u_k u_l) - x_j f_{Vk} - \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j T_{kl}) \right] = 0,$$

que, desarrollando parcialmente las derivadas espaciales y usando que  $\partial x_j / \partial x_l = \delta_{jl}$ , se reescribe

$$\varepsilon_{ijk} x_j \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) - f_{Vk} - \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \right] + \varepsilon_{ijk} \rho u_k u_j - \varepsilon_{ijk} T_{kj} = 0.$$

De la ecuación (2.11) se ve inmediatamente que el corchete es nulo, mientras que la contracción de  $\varepsilon_{ijk}$  con el tensor simétrico  $u_k u_j$  también es nula, por lo que resulta

$$\varepsilon_{ijk} T_{kj} = 0,$$

de donde se deduce inmediatamente (pruébelo como ejercicio) que el tensor de esfuerzos es simétrico

$$T_{ij} = T_{ji}.\quad (2.14)$$

## 2.4. Energía

Finalmente, debemos usar la condición que el trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas externas es igual a la variación por unidad de tiempo de la energía del elemento fluido. Debemos tener en cuenta que esta energía es no sólo cinética sino también interna (por ejemplo, la compresión adiabática de un gas produce aumento de su energía interna). Además, la energía interna puede variar también por el intercambio de calor a través de la superficie del volumen (flujo de calor) o por calor absorbido o emitido en volumen.

Llamando  $e$  a la energía interna específica (por unidad de masa) del medio, la densidad volumétrica de energía total es  $1/2\rho u^2 + \rho e$ , con lo que tomando como  $f(\mathbf{x}, t)$  a esta magnitud,  $F$  corresponde a la energía total  $U$  del volumen

cuya variación temporal es igual al trabajo externo por unidad de tiempo más el calor intercambiado, también por unidad de tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \int_{V(t)} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] d^3x \\ &= \int_{V(t)} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} d^3x + \int_{S(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS + \int_{V(t)} Q_V d^3x + \int_{S(t)} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS,\end{aligned}$$

donde  $Q_V$  es el calor absorbido (emitido si es negativo) por unidad de tiempo y de volumen, y  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de calor (el signo menos asegura que el  $\mathbf{q}$  saliente,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$ , corresponde a pérdida de energía).

Usando (2.10) y aplicando el teorema de la divergencia a las integrales de superficie se demuestra como es habitual que, en notación indicial,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = f_{V_k} u_k + \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} u_i) - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + Q_V.$$

Queda como ejercicio que, usando las (2.5) y (2.12), la ecuación se reduce a

$$\rho \frac{de}{dt} = T_{ij} S_{ij} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + Q_V, \quad (2.15)$$

donde  $S_{ij}$  es el tensor velocidad de deformación.

## 2.5. Conjunto completo de ecuaciones

La dinámica de un medio continuo homogéneo se describe entonces por el conjunto de ecuaciones arriba deducidas, que reescribimos aquí en forma compacta

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}_V + \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \rho \frac{de}{dt} &= T_{ij} S_{ij} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q_V,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $\mathbf{T}$  es un tensor simétrico. Deben darse además la expresión de  $\mathbf{f}_V$  que depende en general de  $\rho$  y, eventualmente de  $\mathbf{u}$  mismo (por ejemplo, fuerza de Coriolis), la de  $\mathbf{q}$  y  $Q_V$  que dependen en general de las variables termodinámicas del medio (básicamente temperatura) y eventualmente de  $\mathbf{u}$ , la ecuación de estado que relaciona  $e$  con la densidad y la temperatura, y, finalmente, la expresión del tensor de esfuerzos en función de

las variables termodinámicas y del campo de velocidades  $\mathbf{u}$  del medio. Esta última relación es la llamada relación constitutiva, la determinación de la cual para un medio dado es uno de los problemas más difíciles de la física de los medios continuos.

Una ley de bastante generalidad es la que determina el flujo de calor en términos de las variables termodinámicas, que es la ley de Fourier

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \quad (2.16)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica, que es aproximadamente constante en muchos casos de interés, y  $T$  es la temperatura.

Si el medio no fuese homogéneo; esto es, estuviese constituido por distintos componentes, determinados cada uno de ellos por, por ejemplo, su concentración, deberían complementarse estas ecuaciones con ecuaciones para las concentraciones, que pueden variar por reacciones químicas entre los distintos componentes. Además, la ecuación de estado depende en general de estas concentraciones.

## 2.6. Hidrostática

Para una enorme variedad de medios continuos es válido el principio de Pascal, que corresponde a la observación que en el caso hidrostático (campo de velocidad permanentemente nulo) el esfuerzo que sufre en cada punto de su superficie un objeto sumergido en el seno de un fluido, es siempre normal en ese punto a dicha superficie, y dirigido hacia adentro (compresión). Esto es independiente de la forma y composición del cuerpo, y debe por lo tanto valer también cuando el objeto en cuestión es una partícula del mismo fluido.

Podemos decir entonces que si el elemento de superficie  $\delta S$  de una partícula de fluido tiene normal externa  $\mathbf{n}$ , la fuerza de contacto en ese punto sobre la partícula es

$$\delta \mathbf{F} = -p\mathbf{n}\delta S,$$

donde  $p$  es una magnitud escalar positiva, denominada presión, con lo que el signo menos asegura que la fuerza tiende a comprimir la partícula, a la vez que tiene la dirección de la normal. Por otro lado, por (2.10), es

$$\delta F_i = t_i\delta S = T_{ij}n_j\delta S,$$

con lo que tenemos que  $T_{ij}n_j = -pn_i$  **cualquiera sea la normal**, lo que es cierto sólo si

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (2.17)$$

Tenemos de esta manera determinada la forma general del tensor de esfuerzos en el caso hidrostático  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , con lo que las ecuaciones generales resultan en este caso (usando la ley de Fourier para el flujo de calor)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \mathbf{f}_V - \nabla p &= 0, \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_V.\end{aligned}$$

Una condición necesaria para la existencia de solución estática es entonces que la densidad sea localmente constante, aunque pueda diferir en distintos puntos. Otra condición muy fuerte es que las fuerzas de volumen deben ser potenciales, para poder ser compensadas por el gradiente de un escalar como es la presión. Nótese que para el caso gravitatorio es

$$\mathbf{f}_V = \rho \mathbf{g},$$

con  $\mathbf{g}$  la aceleración local de la gravedad. Si bien  $\mathbf{g} = -\nabla \varphi$ , con  $\varphi$  el potencial gravitatorio, la forma de  $\rho$  debe ser la apropiada para cumplir  $\rho \nabla \varphi = -\nabla p$ , siendo un caso importante el de  $\rho = cte$ .

Finalmente, si bien puede existir matemáticamente una solución estática, para que se verifique en la realidad, dicha solución debe ser además estable; esto es, pequeños apartamientos (arbitrarios por otro lado) de la solución deben evolucionar de manera de restablecer la solución estática.

Finalmente, como es en general artificial permitir que la energía interna varíe localmente con el tiempo sin que lo haga la densidad, podemos escribir con mucha generalidad para el caso hidrostático en un campo gravitacional, el conjunto de ecuaciones para todas magnitudes independientes del tiempo

$$\begin{aligned}\rho \nabla \varphi &= -\nabla p, \\ \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_V &= 0,\end{aligned}$$

complementadas con la ecuación de estado

$$p(\rho, T),$$

la expresión de  $\varphi$  o su ecuación, que para el caso de un fluido que produce su propia gravedad (autogravitante), como es una estrella, es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho,$$

con  $G$  la constante de la gravitación de Newton.

Finalmente deben darse las expresiones de  $k$  y de  $Q_V$ . Como ejemplo importante consideremos el caso de una estrella.  $Q_V$  corresponde entonces a la energía generada localmente (por unidad de tiempo y volumen) por reacciones termonucleares, mientras que la conductividad térmica es predominantemente debida a la radiación electromagnética (esto vale fuera de regiones donde la solución estática es inestable, en las que existe movimiento y el calor es transportado por convección; las llamadas zonas convectivas), por lo que la conductividad térmica efectiva es de la forma

$$k = C \frac{T^3}{\rho},$$

con  $C$  una constante. Para conductividad dominada por scattering electrónico es

$$C = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{1 + X} \text{ erg g s}^{-1} \text{ cm}^{-4} \text{ K}^{-4},$$

con  $X$  la fracción (en masa) de hidrógeno,  $X \simeq 0,69$  para el sol.

Además, por las enormes temperaturas involucradas, una ecuación de estado de gas ideal es una muy buena aproximación, lo mismo que la suposición de simetría esférica (todo depende sólo de la coordenada radial  $r$ ). La ecuación de estado de gas ideal que incluye las presiones parciales de electrones y iones de hidrógeno y helio es

$$p = \left( 2X + \frac{3}{4}Y \right) R \rho T,$$

con  $R$  la constante universal de los gases,  $R = 1,38 \cdot 10^7 \text{ erg g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $X$  es nuevamente la fracción (en masa) de hidrógeno, e  $Y$  la correspondiente a helio,  $Y \simeq 0,289$  para el sol.

Finalmente, si se supone que la energía nuclear es liberada sólo en el centro de la estrella

$$Q_V = \frac{L}{4\pi r^2} \delta(r),$$

con  $L$  la energía total liberada por segundo por reacciones nucleares (que es la luminosidad de la estrella pues toda ella se irradia finalmente,  $L = 4 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$  para el sol), la solución del sistema completo es muy sencilla (puede hacerse con una calculadora programable) y puede obtenerse una buena aproximación a la estructura interna de una estrella como el sol, que sólo tiene una zona convectiva relativamente pequeña cerca de su superficie.

# Capítulo 3

## Relaciones constitutivas

Debemos considerar la cuestión de la forma del tensor de esfuerzos  $\mathbf{T}$  para distintos tipos de medios. Este problema es eminentemente experimental; pero existen consideraciones generales que limitan las formas posibles y guían el diseño de experimentos.

Hemos visto que, con mucha generalidad, el tensor de esfuerzos en el caso hidrostático está dado por

$$T_{ij} = -p(\mathbf{x})\delta_{ij}. \quad (3.1)$$

Si un fluido estático es considerado desde un sistema de referencia que tiene un movimiento arbitrario (sistema en general no inercial), es claro que, como las fuerzas son invariantes ante cambio de sistema de referencia, aun no inercial, el fluido tendrá en este sistema un campo de velocidades más o menos complicado, pero el tensor de esfuerzos correspondiente será el mismo (3.1), incluso con el mismo valor de presión en puntos correspondientes:

$$T'_{ij} = -p(\mathbf{x}')\delta_{ij},$$

con  $\mathbf{x}'$  el transformado de  $\mathbf{x}$ . Esto nos indica que si el fluido se mueve “como un sólido rígido”, por más complicado que sea este movimiento, el tensor de esfuerzos estará dado por (3.1), y apartamientos de esta forma aparecerán sólo si el campo de velocidades se aparta del movimiento rígido. Escribamos entonces, en general, que

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\delta_{ij} + \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (3.2)$$

donde  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  es una funcional del campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , y el campo de presiones es también una funcional de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , y difiere en general del valor correspondiente al caso estático. (Se entiende aquí por funcional la

dependencia respecto de la función “completa”  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , para todo  $\mathbf{x}$  y  $t$ , y no ya de sólo su valor local y actual).

Para determinar las posibles formas de  $\sigma_{ij}$  impongamos algunas condiciones que por principio debe cumplir dicha funcional:

- i) Lo dicho antes;  $\sigma_{ij} = 0$  si  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  corresponde a movimiento rígido.
- ii) Por corresponder a un esfuerzo, debe ser invariante ante cambio de sistema de referencia (inercial o no).
- iii) Es un tensor y debe ser por lo tanto expresable en términos de tensores a través de operaciones covariantes.
- iv) Debe ser causal; esto es, depender de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t')$  para  $t' \leq t$ , con  $t$  el momento actual.

Todas estas condiciones son muy generales y a ser satisfechas siempre. Condicionemos algo más a  $\sigma_{ij}$  imponiendo ahora condiciones “razonables”, que esperamos cumplan algunos fluidos de interés:

- a) Consideremos un fluido sin memoria; esto es, en los que el  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  dependa funcionalmente sólo de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  en el instante actual  $t$ .
- b) Que sea isótropo, sin direcciones privilegiadas, lo que nos dice que el carácter tensorial de  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  debe estar dado sólo por el mismo campo  $\mathbf{u}$  y a lo sumo tensores invariantes como  $\delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$ , etc.
- c) Que dependa sólo localmente de  $\mathbf{u}$ , esto es,  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  depende sólo de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  y de sus derivadas espaciales locales más bajas; en particular, pediremos que sea altamente local, dependiendo de sólo las derivadas de orden uno.

Por a) y c) tenemos que

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = F_{ij} \left( \mathbf{x}, t, u_k(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u_l(\mathbf{x}, t)}{\partial x_m} \right), \quad (3.3)$$

donde  $F_{ij}$  no es ya una funcional, sino una función de las variables indicadas en su argumento. Por otro lado, por no ser  $\mathbf{u}$  invariante ante cambio de sistema de referencia,  $\sigma_{ij}$  no puede depender de  $\mathbf{u}$  mismo. Consideremos en este sentido a su gradiente  $\partial u_l / \partial x_m$ , que descomponemos en su parte simétrica (tensor velocidad de deformación) y su parte antisimétrica

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_m} = S_{lm} + \Omega_{lm}. \quad (3.4)$$

Si consideramos un cambio de sistema de referencia arbitrario, podemos relacionar la velocidad  $u_l(\mathbf{x}, t)$  en el sistema original con la correspondiente medida en el nuevo sistema,  $u'_l(\mathbf{x}', t)$ , como

$$u'_l(\mathbf{x}', t) = u_l(\mathbf{x}, t) - U_l(t) - \varepsilon_{lkm} W_k(t) x'_m, \quad (3.5)$$

con  $\mathbf{x}'$  el transformado de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{U}(t)$  la velocidad instantánea de translación del origen del sistema nuevo y  $\mathbf{W}(t)$  la velocidad angular instantánea de rotación de sus ejes. Si calculamos el tensor de deformación correspondiente a  $u'_i(\mathbf{x}', t)$  derivando la (3.5), usando que  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{R}(t)$ , con  $\mathbf{R}(t)$  la posición del origen del nuevo sistema, obtenemos fácilmente

$$S'_{lm} = S_{lm},$$

mientras que la parte antisimétrica está dada por

$$\Omega'_{lm} = \Omega_{lm} - 2\varepsilon_{lkm}W_k(t).$$

Es entonces claro que  $\Omega_{lm}$  no es invariante ante cambios de sistema de referencia arbitrarios, mientras que  $S_{lm}$  sí lo es. De esta manera,  $\sigma_{ij}$  debe depender sólo de  $S_{lm}$ .

Si suponemos que la  $F_{ij}$  en (3.3) es analítica podemos desarrollarla en serie de Taylor y escribir, por iii) y b),

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = a_0(\mathbf{x}, t)\delta_{ij} + a_1(\mathbf{x}, t)S_{ij}(\mathbf{x}, t) + a_2S_{ik}(\mathbf{x}, t)S_{kj}(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (3.6)$$

con los  $a_i(\mathbf{x}, t)$  funciones escalares, invariantes ante cambio de sistema de referencia arbitrario. Es fácil convencerse de que el carácter tensorial dado por (3.6) es el único posible ya que, por ejemplo, no hay manera de incluir contracciones con  $\delta_{kl}$  pues éstas simplemente cambiarían el nombre de los índices, mientras que contracciones con  $\varepsilon_{klm}$  producen ya sea nuevas  $\delta_{kl}$  (contracciones de índices de  $\varepsilon$ 's entre sí) o cero (contracciones de  $\varepsilon$ 's con ambos índices de tensores simétricos).

Finalmente, por i), debe ser  $a_0(\mathbf{x}, t) = 0$ , con lo que escribimos, no explicitando la dependencia  $(\mathbf{x}, t)$ , y notando que los productos contraídos de tensores en (3.6) corresponden a productos de matrices,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{S}^n. \quad (3.7)$$

Notablemente, se puede precisar mucho más la expresión de  $\boldsymbol{\sigma}$  haciendo uso del teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz diagonalizable (como lo es  $\mathbf{S}$ ) satisface su propia ecuación característica.

La ecuación característica satisfecha por los autovalores  $\lambda$  de  $\mathbf{S}$

$$\det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

se escribe explícitamente como

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0,$$

con (usando  $Tr$  para simbolizar la traza)

$$\begin{aligned} I_1 &= Tr(\mathbf{S}) = S_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \{ [Tr(\mathbf{S})]^2 - Tr(\mathbf{S}^2) \}, \\ I_3 &= \det(\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

los tres invariantes (escalares) de  $\mathbf{S}$ . De manera que, por Cayley-Hamilton podemos escribir ( $\mathbf{I}$  es la matriz identidad)

$$\mathbf{S}^3 = I_1 \mathbf{S}^2 - I_2 \mathbf{S} + I_3 \mathbf{I},$$

por lo que todas las potencias de la matriz  $\mathbf{S}$  superiores a 2 pueden expresarse en términos de las potencias 0, 1 y 2 multiplicadas por factores que dependen de los tres invariantes  $I_i$ . De esta manera, si todas las potencias superiores a 2 son reescritas de esta manera en (3.7), esta última se escribe como

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{S} + \gamma \mathbf{S}^2, \quad (3.9)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son funciones escalares de los tres invariantes  $I_i$  que se obtienen al sumar los infinitos términos factores de cada una de las potencias 0, 1 y 2 de  $\mathbf{S}$ .

Nótese que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dependen además de  $(\mathbf{x}, t)$  por la dependencia original de los  $a_i$  en (3.7); pero esta dependencia debe ser a través de funciones invariantes como, por ejemplo, las propiedades termodinámicas.

La expresión (3.9) es la más general que satisface las condiciones a), b) y c) y es denominada relación constitutiva de Reiner-Rivlin, en la cual las funciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  deben determinarse experimentalmente en general.

Se observa en la práctica que la relación (3.9) es lineal con excelente aproximación para muchos fluidos de interés como el agua, los gases y los aceites minerales. Esto significa que  $\gamma = 0$ ,  $\beta$  es independientes de los  $I_i$ , y  $\alpha$  depende linealmente de sólo  $I_1$ .

De esta manera escribimos para estos fluidos, que se denominan newtonianos, usando (3.8),

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\lambda}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \mathbf{S}, \quad (3.10)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad, o simplemente viscosidad, que es definido positivo, y  $(2\mu + \lambda)/3$  se denomina segundo coeficiente de viscosidad o segunda viscosidad.

En la práctica se usa algunas veces que, con relativamente buena aproximación, la segunda viscosidad es nula, por lo que  $\lambda = -2\mu$ , (esto es exacto

para gases ideales monoatómicos y se denomina hipótesis de Stokes, pero puede fallar en sustancias más complejas).

Escribamos el tensor de esfuerzos completo

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} + \frac{\lambda}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.11)$$

y calculemos las ecuaciones dinámicas correspondientes. Tomando la divergencia de (3.11)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\lambda}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{u};$$

explicitando el segundo término de la derecha,

$$2\mu \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{u},$$

se tiene finalmente

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \left( \mu + \frac{\lambda}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{u},$$

con lo que la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (o más simplemente, ecuación de movimiento) se escribe

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_V - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \mu + \frac{\lambda}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.12)$$

Téngase en cuenta que en (3.12) aparece el laplaciano de un vector, que se escribe en forma covariante como

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

y sólo en el caso de usar componentes cartesianas coincide con el vector cuyas componentes son el laplaciano escalar de cada componente del vector original. La (3.12) es denominada ecuación de Navier-Stokes.

Para la ecuación de la energía se requiere calcular

$$T_{ij} S_{ij} = -p S_{ii} + \sigma_{ij} S_{ij} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi,$$

donde  $\Phi \equiv \sigma_{ij} S_{ij}$  se conoce en general como la función disipación, que para el fluido newtoniano (3.10) se escribe

$$\Phi = 2\mu S_{ij} S_{ij} + \frac{\lambda}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2. \quad (3.13)$$

La ecuación de la energía es entonces

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi + Q_V - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.14)$$

Es de mucha utilidad considerar en este punto la evolución de otra magnitud termodinámica, la entropía. Como en el caso de la energía interna es conveniente trabajar con la entropía específica (por unidad de masa)  $s$ . Para determinar la evolución de ésta, aun en evoluciones irreversibles, se usa el postulado de Gibbs válido para todo tipo de evolución

$$T ds = p dv + de, \quad (3.15)$$

con  $v = 1/\rho$  el volumen específico. Para una evolución reversible, (3.15) no es más que el primer principio de la termodinámica; para una evolución irreversible, (3.15) determina la entropía de la partícula de fluido, con la condición que localmente (en cada partícula de fluido) exista con buena aproximación equilibrio termodinámico, de manera que estén allí definidos la presión, temperatura, etc..

Escribiendo entonces (3.15) para la variación temporal en una dada partícula fluida

$$T \frac{ds}{dt} = p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{de}{dt},$$

y usando la ecuación de continuidad escrita como

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u},$$

más la ecuación (3.14), tenemos para la evolución temporal de la entropía específica de una partícula fluida

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} (\Phi + Q_V - \nabla \cdot \mathbf{q}). \quad (3.16)$$

De esta última ecuación se deduce que  $\mu > 0$ , pues si se considera una partícula de fluido que no intercambia calor con el medio,  $Q_V = \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ , al evolucionar entonces adiabáticamente, su entropía sólo puede aumentar; de (3.16) y de (3.13) se deduce entonces lo dicho.

Finalmente consideremos el denominado fluido ideal. En la práctica es posible muchas veces desprestigiar los efectos de viscosidad y conductividad térmica. Si uno hace esto y supone por simplicidad que  $Q_V = 0$ , se tiene el sistema completo de ecuaciones correspondientes al fluido ideal

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_V - \nabla p,$$

$$\frac{ds}{dt} = 0,$$

complementadas con la ecuación de estado  $p(\rho, s)$ .

Estas ecuaciones deben ser completadas en cada problema específico con las condiciones iniciales y de contorno apropiadas.

Siendo que se ha despreciado la viscosidad, el tensor de esfuerzos correspondiente a este fluido ideal tiene la forma  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ , con lo que los esfuerzos que el mismo puede realizar o recibir a través de una superficie son siempre normales a la misma. Esto significa por ejemplo que dicho fluido puede “resbalar” sin fricción alrededor de contornos sólidos, lo que impide fijar condiciones de contorno para la componente tangencial de la velocidad del fluido en contacto con sólidos. Sólo puede fijarse sobre ellos la componente normal por la condición que el fluido no puede penetrar el sólido ni separarse de él (una tal separación significaría la existencia de vacío entre el fluido y el sólido con la consiguiente condición de presión nula, que no es posible conseguir en la práctica en condiciones estables). De esta manera, un fluido ideal en contacto con un sólido debe tener la misma componente de velocidad normal que el sólido en ese punto

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_c, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_{sol}(\mathbf{x}_c, t) \cdot \mathbf{n}, \quad (3.17)$$

con  $\mathbf{x}_c$  la posición del punto sobre el contorno sólido y  $\mathbf{n}$  la normal correspondiente.

Un fluido real, con viscosidad, puede sufrir esfuerzos tangenciales en contacto con sólidos. Si usamos (3.11) para calcular el esfuerzo tangencial sobre un sólido obtenemos

$$\mathbf{t}^{(t)} = \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

que escrito en componentes cartesianas es

$$t_i^{(t)} = T_{ij}n_j - T_{kj}n_k n_j n_i = 2\mu (S_{ij}n_j - S_{kj}n_k n_j n_i).$$

Usemos un sistema de coordenadas tal que en el punto considerado la normal sólo tenga componente 3,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , y calculemos entonces las componentes  $t_{1,2}^{(t)}$

$$t_1^{(t)} = 2\mu S_{13} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (3.18)$$

$$t_2^{(t)} = 2\mu S_{23} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \quad (3.19)$$

Lo que se observa en estas expresiones es que el esfuerzo tangencial puede ser muy grande si la velocidad tangencial al contorno (componentes 1,2) varía fuertemente en la dirección perpendicular al contorno (3). Esto es lo que se observa en la práctica; por más que  $\mu \rightarrow 0^+$ , la variación de velocidad tangencial en la dirección normal se intensifica tanto como sea necesario para dar esfuerzos finitos. La consecuencia de esto (verificada en los experimentos) es que la velocidad del fluido en contacto con el sólido es igual a la del sólido, no ya la componente normal a la superficie solamente, como para un fluido ideal, sino todas sus componentes, con lo que la condición de contorno para un fluido real es, en lugar de (3.17),

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_c, t) = \mathbf{U}_{sol}(\mathbf{x}_c, t). \quad (3.20)$$

Debe quedar claro que la condición (3.20) no se deduce de lo dicho antes, sino que es un resultado de la experiencia.

La conclusión importante de esto es que un fluido ideal no corresponde al límite  $\mu \rightarrow 0^+$  de un fluido real, por tener ambos casos condiciones de contorno distintas. En todo caso, si la viscosidad es en algún sentido pequeña, las (3.18) y (3.19) nos sugieren que las velocidades variarán fuertemente en distancias cortas cerca de los sólidos; puede pensarse entonces en una “capa” delgada que rodea a los sólidos, denominada capa límite, dentro de la cual no pueden ignorarse los efectos viscosos, aunque fuera el fluido puede considerarse ideal. Este fluido ideal desliza con esfuerzo tangencial despreciable sobre la capa límite, por lo que el problema puede pensarse como el de un fluido ideal moviéndose alrededor de sólidos cuyo volumen ha sido aumentado por esta capa. Esta imagen tiene sentido si la viscosidad es realmente pequeña (a ser precisado más adelante) y si la capa límite permanece realmente delgada en todas partes. En ciertas regiones del fluido esto último no es cierto y esta imagen simplificada debe complementarse para ser útil.

# Capítulo 4

## Teoremas generales

Sólo en casos muy sencillos es posible obtener soluciones cerradas de las ecuaciones de los fluidos. Por otro lado, los resultados de mediciones y simulaciones numéricas de sistemas realistas proveen una cantidad de información difícil de interpretar. Por estas razones es necesario contar con ciertas propiedades de los flujos, que se derivan de las ecuaciones originales de movimiento bajo condiciones más o menos restrictivas, que permiten predecir cualitativamente algunas propiedades de la solución de estos sistemas complejos y conceptualizar los resultados de mediciones o simulaciones.

Consideremos las ecuaciones de movimiento de un fluido newtoniano, que reescribimos aquí,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{vis}, \quad (4.2)$$

$$\varrho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi + Q_V + k \nabla^2 T. \quad (4.3)$$

donde

$$\mathbf{f}_{vis} \equiv \frac{1}{\rho} \left[ \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \mu + \frac{\lambda}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]$$

representa la fuerza viscosa específica (por unidad de masa). Además,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

donde  $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$  es la vorticidad.

## 4.1. Teoremas de Bernoulli

Bajo ciertas condiciones es posible obtener primeras integrales de las ecuaciones de movimiento. Consideremos en un dado instante una línea de corriente y proyectemos la ecuación (4.2) sobre ella, usando la expresión (4.4) y tomando el elemento de longitud  $d\mathbf{l}$  de la línea en el punto en cuestión,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + d\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right) = -\frac{dp}{\rho} + \mathbf{f}_m \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{f}_{vis} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.5)$$

donde se usó que  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  es perpendicular a  $d\mathbf{l}$ , y  $d\Psi = \nabla\Psi \cdot d\mathbf{l}$  indica la variación de una magnitud arbitraria  $\Psi$  a lo largo de la línea de corriente en el punto e instante dados.

Hay varios términos en (4.5) que no pueden ser expresados como un diferencial exacto en general, lo que impide una integración inmediata; sin embargo, esto puede hacerse bajo ciertas condiciones.

i) Si la densidad es función de sólo la presión:  $\rho(p)$ , caso que se denomina barotrópico, entonces puede definirse la función de presión ( $p_0$  es un valor de referencia arbitrario)

$$\mathcal{P} \equiv \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (4.6)$$

de manera que  $dp/\rho = d\mathcal{P}$ . El caso más habitual es el de densidad constante, pero existen también otros por ser la densidad función de dos variables termodinámicas, que podemos tomar como  $p$  y  $\Sigma$ , con  $\Sigma$  una variable termodinámica genérica. De esta manera, si  $\Sigma$  es la misma para todas las partículas aparecerá como un parámetro constante en la integración en (4.6). Comúnmente es la entropía específica (cuando ésta se conserva en el movimiento).

- ii) Las fuerzas de masa son conservativas:  $\mathbf{f}_m = -\nabla\varphi_m$ .
- iii) Pueden despreciarse las fuerzas viscosas.
- iv) El flujo es estacionario.

Con todas estas condiciones, (4.5) se escribe

$$d\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \mathcal{P} + \varphi_m\right) = 0,$$

con lo que su integral es inmediata, pero recordando que se refiere a variaciones a lo largo de una línea de corriente, por lo que la constante de integración depende de cuál es la línea considerada (por supuesto, no depende del tiempo por iv)):

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \mathcal{P} + \varphi_m = C_{línea}. \quad (4.7)$$

Otro caso de interés corresponde a un flujo irrotacional,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , que implica que el campo de velocidades es potencial

$$\mathbf{u} = \nabla\phi,$$

lo que, notablemente, permite relajar dos restricciones. Por un lado, la línea sobre la que se proyecta la ecuación (4.2) es arbitraria (no necesariamente de corriente, ya que no hace falta anular el término con  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ ). Por otro lado, se puede relajar la condición iv) ya que  $\partial\mathbf{u}/\partial t = \nabla(\partial\phi/\partial t)$ , con lo que resulta

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \mathcal{P} + \varphi_m = C(t). \quad (4.8)$$

La constante depende en general del tiempo, pero es la misma para todo el fluido por la arbitrariedad de la línea usada para integrar.

Consideremos ahora integrales de la ecuación de la energía (4.3); tomemos  $Q_V = 0$  y despreciemos la conducción térmica,  $\mathbf{q} = 0$ , y la generación de calor por viscosidad,  $\Phi = 0$ . Conviene además trabajar con la entalpía específica  $h = e + p/\rho$ , cuyo derivada material es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}, \quad (4.9)$$

donde se usaron (4.1) y (4.3). Para un caso estacionario tenemos entonces

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h = \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla p, \quad (4.10)$$

pero como sobre una línea de corriente podemos escribir

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \frac{d\mathbf{l}}{|d\mathbf{l}|},$$

la relación (4.10) implica

$$dh = \frac{dp}{\rho},$$

esto es, cuando la conducción térmica entre partículas puede despreciarse, y no existen fuentes de calor, la función de presión  $\mathcal{P}$  es la entalpía específica, con lo que podemos escribir (4.7) como

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + h + \varphi_m = C_{línea}. \quad (4.11)$$

Es importante notar que aquí no es necesario que la entropía sea la misma para todas las partículas; como el flujo es estacionario las líneas de corriente coinciden con las trayectorias, por lo que, como  $s$  se conserva para

cada partícula, sobre cada línea de corriente  $s$  es constante y puede entonces definirse una función de presión válida para cada línea ( $\rho$  es función de  $p$  y de  $s$ , por lo que resulta función sólo de  $p$  en cada línea). De esta manera,  $s$  puede no ser homogéneo ( $\nabla s \neq 0$ ).

Si  $s$  se conserva en el movimiento de cada partícula el flujo se denomina isoentrópico; si además  $s$  es el mismo para todas las partículas, se denomina homoentrópico.

En general vale la relación de Gibbs para cualquier variación de las variables termodinámicas de estado (no necesariamente una variación debida a la evolución termodinámica de una partícula dada), por lo que podemos escribir

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{dp}{\rho} = dh - \frac{dp}{\rho},$$

y, por lo tanto, tomando variaciones espaciales a lo largo una dirección arbitraria,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h - T \nabla s.$$

Podemos entonces escribir en general, para un caso en que se cumplan las condiciones ii)-iv) (flujo no necesariamente barotrópico)

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + h + \varphi_m \right) = T \nabla s,$$

que se denomina relación de Crocco. Para flujo isoentrópico, por (4.11), podemos escribir

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla C_{línea} = T \nabla s.$$

De manera que vemos inmediatamente que si  $C_{línea}$  vale lo mismo para todas las líneas ( $\nabla C_{línea} = \mathbf{0}$ ), un flujo que no sea homoentrópico ( $\nabla s \neq \mathbf{0}$ ) debe ser rotacional ( $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ ). Por otro lado, si  $\nabla C_{línea} = \mathbf{0}$  y el flujo es irrotacional, también debe ser homoentrópico.

## 4.2. Teoremas de la vorticidad

Como el rotor de un gradiente es idénticamente nulo, se tiene inmediatamente de (4.4)

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}). \quad (4.12)$$

Escribiendo en componentes cartesianas

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \omega_l u_m) = \\ (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (\omega_l u_m) &= \partial_j (\omega_i u_j) - \partial_j (\omega_j u_i) = \\ \omega_i \partial_j u_j + u_j \partial_j \omega_i - \omega_j \partial_j u_i &= \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i, \end{aligned}$$

donde se usó que la divergencia de un rotor es idénticamente nula:  $\partial_j \omega_j = 0$ . Con esto, usando que

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega},$$

la expresión (4.12) se escribe

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (4.13)$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \left[ \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left( \frac{1}{\rho} \partial_k p \right) = \\ -\frac{1}{\rho^2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j \rho) (\partial_k p) &= -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p ]_i, \end{aligned} \quad (4.14)$$

(la derivada segunda de  $p$  se anula al contraerse con  $\varepsilon_{ijk}$ ) tomando el rotor del miembro derecho de (4.2) tenemos

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{f}, \quad (4.15)$$

donde  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{vis}$ .

Esta ecuación es válida en general. Supongamos ahora que:

i) La densidad es función sólo de la presión (barotropía), en cuyo caso  $\nabla \rho$  es paralelo a  $\nabla p$ . Así,

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0,$$

lo que implica que

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \mathcal{P}, \quad (4.16)$$

donde  $\mathcal{P}$  es la función de presión (4.6).

ii)  $\mathbf{f}_m$  es conservativa:  $\mathbf{f}_m = -\nabla \varphi_m$ .

iii) Puede despreciarse  $\mathbf{f}_{vis}$ .

Con estas tres condiciones (4.15) se reduce a

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0. \quad (4.17)$$

### 4.2.1. Teorema de evolución de la vorticidad

La ecuación (4.17) puede llevarse a una forma útil haciendo el cambio de variable (en componentes cartesianas)

$$\omega_i = a_j \frac{\partial X_i(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0j}}, \quad (4.18)$$

donde  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  es un campo auxiliar y  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$  la coordenada lagrangiana de la partícula de posición inicial  $\mathbf{x}_0$ . Derivando (4.18) se tiene

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{da_j}{dt} \frac{\partial X_i(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0j}} + a_j \frac{\partial U_i(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0j}}, \quad (4.19)$$

donde se usó que

$$\frac{d\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0).$$

Por otro lado, como,

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0), t),$$

es

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_{0j}},$$

por lo que

$$a_j \frac{\partial U_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} a_j \frac{\partial X_k}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \omega_k,$$

donde se usó la definición (4.18). Reemplazando esta última en (4.19) y el resultado en (4.13) se tiene inmediatamente

$$\frac{da_j}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} + \omega_i (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{da_j}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} + a_j \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (4.20)$$

Llamando

$$b_j \equiv \frac{da_j}{dt} + a_j (\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

$$B_{ij} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}},$$

la ecuación (4.20) se escribe matricialmente como  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$  que, teniendo en cuenta que el determinante de  $\mathbf{B}$  es siempre distinto de cero ya que la

transformación de la posición inicial  $\mathbf{x}_0$  a la actual  $\mathbf{X}$  debe ser invertible, sólo tiene la solución trivial  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , o sea,

$$\frac{da_j}{dt} + a_j (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

que, usando (4.1), se escribe

$$\frac{da_j}{dt} - a_j \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

o, en forma más útil,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a_j}{\rho} \right) = 0,$$

que indica que  $\mathbf{a}/\rho$  se conserva para cada partícula en su movimiento:  $\mathbf{a}/\rho = \mathbf{a}/\rho]_{t=0}$ . En términos de la vorticidad esto es

$$\frac{\omega_i}{\rho} = \frac{a_j}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} = \frac{a_j}{\rho} \Big]_{t=0} \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}},$$

que si se evalúa en  $t = 0$  es

$$\frac{\omega_i}{\rho} \Big]_{t=0} = \frac{a_i}{\rho} \Big]_{t=0},$$

debido a que

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} \Big]_{t=0} = \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_{0j}} = \delta_{ij}.$$

De esta manera, la solución de (4.13) es

$$\frac{\omega_i}{\rho} = \frac{\omega_j}{\rho} \Big]_{t=0} \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}}, \quad (4.21)$$

que indica cómo evoluciona para cada partícula la magnitud  $\omega/\rho$  desde el valor inicial correspondiente  $\omega/\rho]_{t=0}$ . Esto tiene un corolario muy importante: si la vorticidad de una partícula es cero en algún instante, lo seguirá siendo en tiempos posteriores en las condiciones consideradas: la viscosidad puede despreciarse, existe una función de presión y las fuerzas específicas son conservativas. En particular, si inicialmente el flujo es irrotacional, lo seguirá siendo en las condiciones mencionadas.

Por otro lado, diferenciando la posición lagrangiana al tiempo  $t$  respecto de la posición inicial es

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} dx_{0j}, \quad (4.22)$$

que expresa que un pequeño vector  $d\mathbf{x}_0$  integrado por partículas de fluido en  $t = 0$ , se transforma en  $t$  en el vector  $d\mathbf{X}$  indicado, constituido por las mismas partículas de fluido. En particular, si se toma

$$d\mathbf{x}_0 = \varepsilon \left. \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right]_{t=0}, \quad (4.23)$$

con  $\varepsilon$  pequeño, (4.21) y (4.22) indican que

$$d\mathbf{X} = \varepsilon \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}, \quad (4.24)$$

esto es, en el curso del movimiento ambos vectores siguen siendo proporcionales a través de la misma constante  $\varepsilon$ . Esto tiene una implicancia importante: si definimos líneas de vorticidad, en analogía a líneas de corriente, como aquellas que son tangentes al vector  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $d\mathbf{x}_0$  elegido como indica (4.23) es un elemento de longitud en una línea de vorticidad en  $t = 0$  y, por (4.24),  $d\mathbf{X}$ , que está conformado por las mismas partículas fluidas, lo será en tiempos posteriores; es decir, las líneas de vorticidad están constituidas por partículas de fluido.

Otra consecuencia de gran importancia, sobre todo para la comprensión de la turbulencia, es que si se considera un fluido incompresible homogéneo, por ser  $\rho = cte$ , (4.24) indica que si las partículas que conforman  $d\mathbf{X}$  se van separando en su movimiento ( $|d\mathbf{X}|$  crece), la intensidad de  $\boldsymbol{\omega}$  en ellas debe crecer. En un movimiento caótico las partículas tienden a separarse por lo que la vorticidad tiende a incrementarse.

### 4.2.2. Teorema de Kelvin

Probemos ahora el teorema de Thomson (Lord Kelvin), de importantes consecuencias prácticas. Para esto consideremos una curva cerrada  $C(t)$  conformada por partículas fluidas y calculemos la circulación del vector velocidad a lo largo de la misma (que llamaremos simplemente circulación y designaremos con  $\Gamma$ )

$$\Gamma(t) \equiv \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{C_0} \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0i}} dx_{0i}, \quad (4.25)$$

donde en la última igualdad se expresó la integral usando la descripción lagrangiana, y se extendió por lo tanto la integral a la curva inicial  $C_0$  (recuérdese que estamos integrando sobre una curva fluida). Como  $C_0$  es, por supuesto, independiente del tiempo, la derivada temporal de (4.25) es trivial

en la descripción lagrangiana:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_0} \frac{d\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0)}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0i}} dx_{0i} + \oint_{C_0} \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0i}} dx_{0i}.$$

Como

$$\oint_{C_0} \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0i}} dx_{0i} = \frac{1}{2} \oint_{C_0} \frac{\partial |\mathbf{U}|^2}{\partial x_{0i}} dx_{0i} = 0,$$

por ser la integral de un diferencial exacto sobre una curva cerrada, resulta

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_0} \frac{d\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_0)}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0i}} dx_{0i} = \oint_{C(t)} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.26)$$

donde en la última igualdad se volvió a la descripción euleriana. Nuevamente, si se cumplen las condiciones i)-iii), usando (4.2) y (4.16) tenemos

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = - \oint_{C(t)} \nabla (\mathcal{P} + \varphi_m) \cdot d\mathbf{x} = 0, \quad (4.27)$$

nuevamente por ser la integral de un diferencial exacto sobre una curva cerrada. Éste es el teorema de Thomson: la circulación sobre una curva fluida es constante en el tiempo, en las condiciones consideradas.

Consideremos ahora que el flujo no es barotrópico (se denomina en este caso baroclínico. En tal caso, siempre despreciando las fuerzas viscosas y considerando las fuerzas de masa conservativas, tenemos de (4.26), en lugar de (4.27), usando el teorema de Stokes,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{C(t)} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{x} = - \int_{S[C(t)]} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{n} dS,$$

que se reescribe, con (4.14),

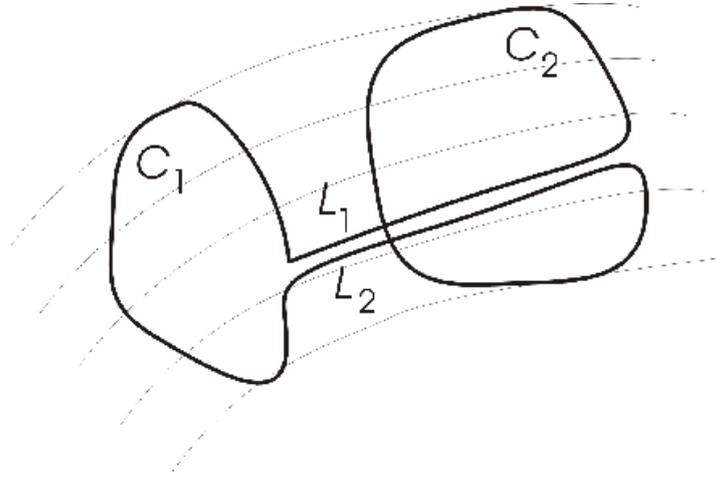
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{S[C(t)]} \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.28)$$

Esta expresión es muy útil para determinar la circulación inducida por efectos baroclínicos. Imagínese, por ejemplo, aire en equilibrio hidrostático sobre una región que presenta diferencia de temperatura; puede ser una zona costera, en la que el sol calienta preferentemente la tierra respecto del agua. Las isobaras serán líneas horizontales (equilibrio hidrostático en el campo gravitatorio) y el gradiente de presión un vector vertical que apunta hacia abajo. La densidad, en cambio, variará en una dirección oblicua, cerca de la tierra más caliente será menor que cerca del agua. De esta manera, tomando un circuito en

el aire originalmente quieto, vemos de (4.28) que esta situación estática no puede mantenerse, y que se generará circulación del aire desde el agua hacia la tierra a baja altura, y de la tierra hacia el agua a alturas mayores (lo inverso ocurre a la noche, cuando la tierra se enfría más rápidamente que el agua).

### 4.2.3. Teoremas de Helmholtz

Consideremos los denominados tubos de vorticidad, cuya superficie lateral está constituida por líneas de vorticidad, y la curva cerrada  $C$  conformada por las curvas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L_1$  y  $L_2$ , que se apoya sobre dicha superficie.



$L_1$  y  $L_2$  están infinitamente próximas por lo que  $C_1$  y  $C_2$  pueden considerarse curvas cerradas. Como por el teorema de Stokes es

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S(C)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (4.29)$$

por ser  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{n}$  perpendiculares por construcción, separando  $C$  en las distintas curvas que la conforman, escribimos

$$\oint_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} + \oint_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} + \int_{L_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} + \int_{L_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Las integrales sobre  $L_1$  y  $L_2$  se cancelan entre sí al estar infinitamente próximas y ser recorridas en sentidos contrarios, mientras que al recorrer en un único sentido  $C$ , la curva  $C_1$  se recorre en sentido contrario a la  $C_2$  por lo que la última expresión se escribe  $\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$ , que implica que la circulación a lo largo de cualquier curva que envuelva al tubo de vorticidad es la misma. Esto es lo que dice el primer teorema de Helmholtz.

Usando nuevamente el teorema de Stokes, podemos escribir esta circulación como

$$\Gamma = \oint_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S(C_1)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Si el tubo de vorticidad es muy estrecho se lo denomina hilo de vorticidad y en él puede aproximarse  $\Gamma = |\boldsymbol{\omega}|S$ . La constancia de  $\Gamma$  nos dice en particular que los hilos de vorticidad no pueden comenzar ni terminar dentro del fluido, ya que en tal caso sería  $|\boldsymbol{\omega}| = 0$  y, por lo tanto,  $\Gamma = 0$ . De esta manera, los hilos de vorticidad o se extienden al infinito o comienzan y/o terminan en los contornos, o son líneas cerradas. Otra forma de ver esto es que por ser  $\boldsymbol{\omega}$  un rotor su divergencia es nula, por lo que según el teorema de Gauss el flujo de vorticidad es cero a través de cualquier superficie cerrada; si una línea de vorticidad terminase en el seno del fluido, un pequeño volumen que rodease el punto donde la línea termina tendría claramente flujo de vorticidad no nulo a través de su superficie (piénsese en el análogo magnético:  $\boldsymbol{\omega}$  análogo al campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$ ).

El segundo teorema de Helmholtz dice que las partículas sobre la superficie de un tubo de vorticidad permanecen sobre dicha superficie. En efecto, si en un instante dado se toma una curva cerrada  $C$  que no envuelva al tubo de vorticidad; pero que se apoya sobre éste, se cumplirá para aquélla la relación (4.29). Por el teorema de Thomson, la circulación sobre la curva fluida formada por los elementos que al instante considerado formaban la curva  $C$  seguirá siendo nula, por lo que dichos elementos deben seguir estando sobre la superficie del tubo de vorticidad, ya que si la curva concatenase líneas de vorticidad del tubo se generaría circulación a lo largo de ella (téngase en cuenta que, salvo por la condición de estar en un instante dado sobre un tubo de vorticidad, la curva  $C$  es arbitraria).

El tercer teorema de Helmholtz reúne las consecuencias de los anteriores. Al ser la circulación la misma en cada instante para todo el tubo de vorticidad, y al estar formadas sus paredes siempre por las mismas partículas fluidas, la circulación alrededor de un tubo de vorticidad es constante en el tiempo (la misma para todo el tubo).

#### 4.2.4. Teorema de Ertel (sistemas rotantes)

Cuando el flujo no es barotrópico los teoremas anteriores referidos a la vorticidad pierden su utilidad. Sin embargo, existe un teorema aplicable en flujos baroclínicos bajo ciertas condiciones. Como la baroclinicidad es usual en flujos atmosféricos y oceánicos de gran escala, conviene de entrada deducir el teorema en un sistema rotante; para usarlo en situaciones en que pueda despreciarse la rotación basta tomar la velocidad angular del sistema igual a

cero. Volvamos entonces a considerar la ecuación (4.2) pero ahora aplicada al campo de velocidad medido respecto de un sistema que rota uniformemente con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$ , por lo que incluimos los términos adicionales de Coriolis y centrífugo,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_m - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{f}_{visc}. \quad (4.30)$$

El término centrífugo se puede escribir como

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} = -\nabla \left[ \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 \right].$$

Notemos al pasar entonces que, por ser  $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} = 0$  para un diferencial de longitud sobre una línea de corriente, puede obtenerse una integral de Bernoulli también en este caso para flujo estacionario y barotrópico,  $\mathbf{f}_m$  conservativa y  $\mathbf{f}_{visc}$  despreciable, de la forma

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \mathcal{P} + \varphi_m - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 = C_{línea}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \Omega_l u_m) = \\ \Omega_i \partial_m u_m - \Omega_l \partial_l u_i &= \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i, \end{aligned}$$

por lo que al tomar el rotor de (4.30) obtenemos en lugar de (4.15) (luego de pasar al miembro de la izquierda el término de Coriolis)

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_a (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{f},$$

donde se ha definido la vorticidad absoluta

$$\boldsymbol{\omega}_a \equiv \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega},$$

que es la vorticidad del elemento de fluido medida en el sistema inercial. Por otro lado, como  $d\boldsymbol{\Omega}/dt = 0$ , podemos incluir un término  $2\boldsymbol{\Omega}$  dentro de la derivada temporal y escribir

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} + \boldsymbol{\omega}_a (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{f}. \quad (4.31)$$

Comparando esta ecuación con (4.15) vemos que, como es de esperar, los teoremas deducidos antes para  $\boldsymbol{\omega}$  son satisfechos por  $\boldsymbol{\omega}_a$  en sistemas rotantes.

Si reemplazamos  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  en (4.31) usando la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

podemos reescribir (4.31) como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \right) - \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f}. \quad (4.32)$$

Consideremos ahora una magnitud escalar  $\Theta$  que es conservada para cada partícula (podría ser la entropía específica en un fluido ideal, pero existen otras posibilidades); esto es

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_k \partial_k \Theta = 0.$$

Tomando el gradiente de esta ecuación verificamos fácilmente que

$$\frac{d}{dt} \partial_i \Theta = -(\partial_i u_k) \partial_k \Theta,$$

y al multiplicar escalarmente esta ecuación por  $\boldsymbol{\omega}_a/\rho$  tenemos

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \Theta = - \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \nabla \Theta. \quad (4.33)$$

Multiplicando (4.32) escalarmente por  $\nabla \Theta$  y sumando a (4.33) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \Theta \right) = \nabla \Theta \cdot \left[ \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f} \right].$$

Por lo tanto, si

- a) las fuerzas viscosas pueden despreciarse,
- b) las fuerzas de masa son conservativas, y
- c) el flujo es barotrópico o, aquí es donde está la ventaja de este teorema sobre otros,  $\Theta$  es función de sólo  $p$  y  $\rho$ , con lo que su gradiente es perpendicular a  $\nabla \rho \times \nabla p$ , resulta entonces que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \Theta}{\rho} \right) \equiv \frac{d\Pi}{dt} = 0, \quad (4.34)$$

que expresa la conservación de la denominada vorticidad potencial  $\Pi$  para cada partícula de fluido.

Sabemos que si pueden despreciarse los intercambios de calor, la entropía específica de las partículas se conserva en su movimiento, por lo que podría

tomarse  $\Theta = s$ . En la práctica es más conveniente tomar a la temperatura potencial en lugar de  $s$ . Temperatura potencial es la temperatura que tendría la partícula si se la llevase adiabáticamente a un estado de presión  $p_0$ , con  $p_0$  un valor de referencia fijo. Si la entropía se conserva en el movimiento, al llevar una partícula dada a la presión  $p_0$  en forma adiabática, dicha partícula alcanzaría siempre la misma temperatura, cualquiera fuese su estado inicial; esto es, cada partícula conserva en su movimiento su temperatura potencial. La temperatura potencial es una variable termodinámica pura y depende por lo tanto de sólo  $p$  y  $\rho$ . Para un gas ideal de exponente adiabático  $\gamma$  es fácil mostrar que la temperatura potencial es

$$\Theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} .$$

Otra caso baroclínico de interés es el de un líquido, que es incompresible, pero cuya densidad depende de la concentración de algún elemento, como por ejemplo la sal en el agua marina. Si la difusión de sal puede despreciarse en la evolución de interés, la concentración de sal y, por lo tanto, la densidad de cada partícula se conservará en el movimiento, aunque pueda diferir de una partícula a otra y existir entonces un gradiente de densidad. Puede en este caso definirse (es claro que se satisfacen las condiciones del teorema)

$$\Pi = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \rho}{\rho} .$$

En casos barotrópicos estacionarios, puede tomarse como magnitud conservada la constante de Bernoulli cuando ésta difiere línea a línea.

En general, en un flujo estacionario es claro que donde las líneas de corriente se separan, la magnitud del gradiente de la cantidad conservada  $\Theta$  disminuye; por (4.34) la componente de  $\boldsymbol{\omega}_a/\rho$  en la dirección en que separan las líneas debe entonces aumentar (lo opuesto ocurre, por supuesto, si las líneas se aproximan). La aplicación de este hecho simple explica una serie de fenómenos muy sorprendentes que ocurren en sistemas rotantes.

## Capítulo 5

# Flujo compresible estacionario

Consideremos el flujo de un fluido muy poco viscoso en un conducto largo de área suavemente variable. Para cuantificar esto digamos que el área en un punto dado del conducto tiene dimensiones características  $L^2$ . Se dice entonces que el fluido es poco viscoso si la capa límite en la que la viscosidad es importante es muy delgada comparada con  $L$ , y el área suavemente variable si la misma cambia poco en longitudes de orden  $L$  a lo largo del conducto. Se observa en la práctica que en estas condiciones el campo de velocidades es con muy buena aproximación unidimensional, con componente sólo a lo largo del conducto. Además, en las zonas donde no hay entrega externa de calor el flujo puede considerarse isoentrópico. Así, si el flujo que ingresa al conducto es irrotacional y las fuerzas de masa son conservativas, en condiciones estacionarias el flujo fuera de la capa límite se mantendrá irrotacional (teorema de Cauchy); por lo tanto, siendo que es también unidimensional debe ser uniforme en toda el área (fuera de la capa límite). Llamando  $x$  a la coordenada a lo largo del conducto, que suponemos cartesiana (el conducto es recto o de curvatura muy suave), designamos al área como  $A(x)$  y a la velocidad  $u(x)$  que, al ser muy delgada la capa límite, tomamos uniforme en toda  $A$ . La masa por unidad de tiempo (caudal másico) que atraviesa una sección dada es entonces  $\rho(x)u(x)A(x)$  que en condiciones estacionarias debe ser la misma que atraviesa cualquier otra sección. Así, llamando  $G$  al caudal másico, las ecuaciones que gobiernan este flujo son (las variables sólo dependen de  $x$ )

$$\rho u A = G = cte, \quad (5.1)$$

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (5.2)$$

$$u \frac{ds}{dx} = 0. \quad (5.3)$$

En (5.2) se ha despreciado la componente de fuerza de masa en  $x$ , ya sea porque ésta es la gravedad y el conducto es horizontal, o porque en general es pequeña comparada con los otros términos. La ecuación de la energía (5.3) vale como está escrita en las zonas del conducto donde no se entrega calor y expresa, por supuesto, que  $s = cte$ . Por esto último la presión es función de sólo la densidad, por lo que podemos escribir

$$\left. \frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dx} = c^2 \frac{d\rho}{dx},$$

donde se ha introducido la velocidad del sonido local  $c(x)$ . Así, (5.2) puede reescribirse

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dx},$$

que, introduciendo el número de Mach  $M = u/c$  que es la velocidad del flujo medida en unidades de la velocidad local del sonido, escribimos como (considerando que todas las variables dependen sólo de  $x$ )

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u}. \quad (5.4)$$

Esta expresión nos da un criterio para decidir si un flujo puede tratarse como incompresible o no: si  $M^2 \ll 1$ , las variaciones de  $u$  producen cambios muy pequeños de  $\rho$  por lo que el flujo puede tratarse como incompresible. Cuando  $M$  es cercano a la unidad los efectos de compresibilidad son apreciables.

Reescribiendo (5.4) como

$$M^2 \rho du = -u d\rho = -d(\rho u) + \rho du,$$

tenemos,

$$d(\rho u) = (1 - M^2) \rho du$$

que, usando (5.1), se reduce fácilmente a

$$(1 - M^2) \frac{du}{u} = -\frac{dA}{A}. \quad (5.5)$$

Esta expresión indica que en un flujo subsónico ( $M < 1$ ) una disminución del área del conducto en la dirección del flujo aumenta la velocidad de éste, mientras que en un flujo supersónico ( $M > 1$ ), para aumentar la velocidad se requiere que el área crezca. Este hecho poco intuitivo da lugar a la forma especial que tienen las toberas empleadas para acelerar fluidos: mientras el flujo es subsónico el área disminuye hasta un valor mínimo  $A_{\text{mín}}$  (cuello de

la tobera) en la que se alcanza  $M = 1$ ; a partir de allí el área crece junto con el número de Mach.

Sabemos que para el flujo estacionario, isoentrópico y sin fuerzas de masa que hemos considerado podemos escribir la integral de Bernoulli correspondiente como

$$\frac{1}{2}u^2 + h = cte,$$

donde además la constante es la misma para todo el flujo por ser éste irrotacional. El valor de esta constante es el de la entalpía específica que tendría el fluido si su velocidad fuese cero. Puede imaginarse el fluido encerrado en un gran reservorio al que estuviera conectada la tobera; lejos de la entrada de la tobera el fluido está prácticamente quieto y el valor de su entalpía lo simbolizamos con  $h_*$ , denominado valor de reservorio. Así como la entalpía, pueden definirse los valores de reservorio de todas las variables termodinámicas como los que resultarían si el fluido fuese llevado al reposo adiabáticamente. Con esto, escribimos

$$\frac{1}{2}u^2 + h = h_*. \quad (5.6)$$

Esta expresión vale en las zonas donde no hay entrega de calor ni efectos viscosos. En las aplicaciones, al flujo dentro de toberas y otros conductos se le entrega calor (por ejemplo quemando combustible dentro de un reactor de aviación), o trabajo (por medio de partes móviles como hélices y compresores). Para tratar estos casos consideremos la ecuación de la energía total (cinética más interna) en su forma integral sobre un volumen arbitrario

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e \right) d^3x + \int_S \rho \left( \frac{1}{2}u^2 + e \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_V \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} d^3x + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS + \int_V Q_V d^3x + \int_S -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tomemos el volumen limitado por dos áreas transversales  $A_1$  y  $A_2$  del conducto, junto con la pared del conducto entre estas dos áreas, más otra superficie interna que limita los mecanismos móviles que entregan trabajo al fluido (representado por la integral de  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS$  extendida a esta superficie, sobre la que los esfuerzos viscosos son importantes por lo que  $\mathbf{t}$  no es simplemente  $-p\mathbf{n}$ ). Además, consideramos con más generalidad que dentro del volumen se entrega calor (dado por  $Q_V$  más lo que se entregue a través de los contornos activos). Tomemos las áreas laterales  $A_1$  y  $A_2$  alejadas de los mecanismos móviles y de la zona de entrega de calor para que allí valga lo supuesto arriba: flujo unidimensional uniforme y fuerzas viscosas despreciables; el fluido

entra en el volumen por  $A_1$  y sale por  $A_2$ . Despreciando las fuerzas de volumen ( $\mathbf{f}_V \simeq \mathbf{0}$ ), la conducción de calor entre partículas de fluido ( $\mathbf{q} \simeq \mathbf{0}$ ), y considerando flujo estacionario (lo cual es aproximado cerca de las superficies móviles, aunque correcto en la práctica) la (5.7) se escribe

$$\left[ \rho u \left( \frac{1}{2} u^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) A \right]_2 - \left[ \rho u \left( \frac{1}{2} u^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) A \right]_1 = Q + W,$$

donde se usó que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  en las paredes del conducto, que las magnitudes son uniformes sobre  $A_1$  y  $A_2$ , y que en ellas vale  $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$ . Además,  $Q$  es el calor entregado por unidad de tiempo,

$$Q = \int_V Q_V d^3x \int_{S_{activo}} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS,$$

y  $W$  el trabajo por unidad de tiempo (potencia) hecho por las partes móviles sobre el fluido

$$W = \int_{S_{móvil}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (5.8)$$

Si bien  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$  sobre las superficies móviles, la integral

$$\int_{S_{móvil}} \rho \left( \frac{1}{2} u^2 + e \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

tiene una contribución muy pequeña comparada con (5.8), lo mismo que la no estacionariedad del flujo cercano a estas superficies, cuando éstas se diseñan correctamente (piénsese en una hélice delgada; la velocidad normal en un punto de la misma es igual en ambos lados de las paletas o aspas, pero las normales tienen sentidos contrarios, por lo que las contribuciones tienden a cancelarse). Por otro lado, como el fluido sólo ingresa por  $A_1$  y egresa por  $A_2$ , la conservación de masa se escribe como

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = G,$$

por lo que, usando la definición de entalpía específica  $h = e + p/\rho$ , tenemos

$$G \left[ \left( \frac{1}{2} u_2^2 + h_2 \right) - \left( \frac{1}{2} u_1^2 + h_1 \right) \right] = Q + W,$$

o, en términos de los valores de reservorio correspondientes a cada área  $A_1$  y  $A_2$ ,

$$G (h_{2*} - h_{1*}) = Q + W. \quad (5.9)$$

Así, (5.6) es aplicable entre zonas en las que no se entrega calor o trabajo al fluido (sectores pasivos del conducto), mientras que el efecto de entregar

calor y/o trabajo se cuantifica en términos del cambio de los valores de reservorio de la entalpía específica, calculable por (5.9), al atravesar la zona activa del conducto.

Usando (5.5) y (5.6), junto con la ecuación de estado, puede determinarse el flujo si se conoce la forma del conducto  $A(x)$  (alternativamente puede diseñarse el conducto para tener el flujo deseado). Para el caso de un gas ideal (que es una muy buena aproximación en la práctica) esto se hace en forma relativamente sencilla.

Para un gas ideal de exponente adiabático  $\gamma$  y calor específico a presión constante  $c_p$  tenemos la ecuación de estado

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p \rho T, \quad (5.10)$$

y la entalpía específica  $h = c_p T$ . Usando que para evolución adiabática es  $p/\rho^\gamma = cte$ , la velocidad del sonido es

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \gamma \frac{p}{\rho} = (\gamma - 1) c_p T = (\gamma - 1) h, \quad (5.11)$$

con lo que escribimos (5.6) como

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{c_*^2}{\gamma - 1}.$$

En términos del número de Mach, podemos escribir

$$\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{c_*^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{T_*}{T},$$

de donde se despeja la relación entre el número de Mach y la temperatura

$$T = \frac{T_*}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}, \quad (5.12)$$

de la cual, usando la ecuación de estado (5.10) y la relación adiabática escrita en términos de los valores de reservorio como

$$p\rho^{-\gamma} = p_*\rho_*^{-\gamma},$$

se obtienen fácilmente

$$p = \frac{p_*}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma - 1)}}, \quad (5.13)$$

y

$$\rho = \frac{\rho_*}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/(\gamma-1)}}. \quad (5.14)$$

Para completar la solución debe calcularse  $M$  como función del área  $A$  del conducto o tobera. Para esto usamos (5.4) y (5.5) para escribir

$$\frac{1 - M^2}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dA}{A},$$

mientras que, de (5.14),

$$\frac{d\rho}{\rho} = d \ln \rho = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{\frac{\gamma-1}{2} dM^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2},$$

con lo que resulta

$$\frac{1 - M^2}{M^2} \frac{dM^2}{2 + (\gamma-1)M^2} = -\frac{dA}{A}. \quad (5.15)$$

Se ve inmediatamente de esta expresión que  $M = 1$  se alcanza donde el área tiene un extremo ( $dA = 0$ ), el denominado cuello de la tobera, y que si  $M < 1$ ,  $M$  crece al disminuir  $A$ , mientras que si  $M > 1$ ,  $M$  crece al aumentar  $A$ . Por supuesto, para que el flujo se mueva a través de la tobera se requiere una diferencia de presión entre los extremos de ésta. Si, comenzando con flujo subsónico, la diferencia de presión es insuficiente para que se alcance  $M = 1$  en el cuello, (5.15) nos dice que allí  $M$  es máximo ( $dM^2 = 0$ ), por lo que el flujo será siempre subsónico; al pasar el cuello  $M$  vuelve a disminuir por lo que el conducto posterior al cuello no actúa como tobera sino como un difusor (usado para frenar flujos). Por otro lado, si la diferencia de presión es suficiente para alcanzar  $M = 1$  en el cuello, el flujo pasará a ser supersónico a partir de allí. El flujo en la tobera tendrá las características supuestas de unidimensionalidad, estacionariedad, etc. sólo si el diseño de la misma es correcto, tal que a la salida de la tobera la presión predicha por (5.13) coincida con la presión externa (ambiente). Se dice en tal caso que la tobera está adaptada; una tobera desadaptada no es susceptible de cálculos sencillos; el flujo deja de ser aproximadamente unidimensional y aparecen superficies de discontinuidad (ondas de choque y de rarefacción) para ajustar la presión desadaptada con la externa.

Finalmente, (5.15) puede integrarse analíticamente para dar

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = \frac{M_0^2}{M^2} \left[ \frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{(\gamma-1)M_0^2 + 2} \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}, \quad (5.16)$$

con  $A_0$  un área de referencia en la que el número de Mach vale  $M_0$ . La expresión (5.16) da  $M(A)$  en forma implícita que, a partir de las (5.12)-(5.14) proporciona las variables termodinámicas, de donde resulta  $c(A)$  por (5.11) y, por lo tanto, el flujo como  $u(A) = M(A)c(A)$ . Nótese que la temperatura, presión y densidad disminuyen al aumentar el número de Mach, por lo que también lo hace la velocidad del sonido; sin embargo, como muestra (5.5), la velocidad es siempre creciente.

# Capítulo 6

## Flujo compresible no estacionario

### 6.1. Características

Si el flujo tiene componente de velocidad sólo en una dirección cartesiana, que denominaremos  $x$ , y depende sólo de esta coordenada y del tiempo  $t$ :  $u(x, t)$ , para un fluido ideal (sin viscosidad ni conductividad térmica), y sin entrega de calor, se tiene el sistema completo de ecuaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (6.3)$$

donde  $\rho(x, t)$  es la densidad,  $p(x, t)$  es la presión y  $s(x, t)$  es la entropía específica. Por (6.3) la entropía de la partícula de fluido se conserva en su movimiento por lo que su presión es función sólo de la densidad ( $s$  es un parámetro fijo para cada partícula). Consideremos el caso habitual en que  $s$  es la misma para todas las partículas (flujo homentrópico) como, por ejemplo, en el flujo a partir de condiciones iniciales homogéneas. Con esto puede escribirse

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (6.4)$$

con  $c(x, t)$  la velocidad del sonido. Usando (6.4) en (6.2) y multiplicando a (6.1) por  $c/\rho$ , escribimos el par de ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.6)$$

Sumando (6.6) a (6.5) y reagrupando se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad (6.7)$$

mientras que, restando (6.6) de (6.5) y reagrupando se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - c) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Como el flujo es homoentrópico,  $c$  es la misma función de  $\rho$  para todas las partículas, con lo que se puede definir un par de nuevas funciones auxiliares:

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho, \quad (6.9)$$

en términos de las cuales (6.7) y (6.8) se escriben respectivamente como

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial J_+}{\partial x} = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial J_-}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial J_-}{\partial x} = 0, \quad (6.11)$$

que, junto con (6.2), que se escribe para el flujo homoentrópico simplemente como

$$s(x, t) = s_0, \quad (6.12)$$

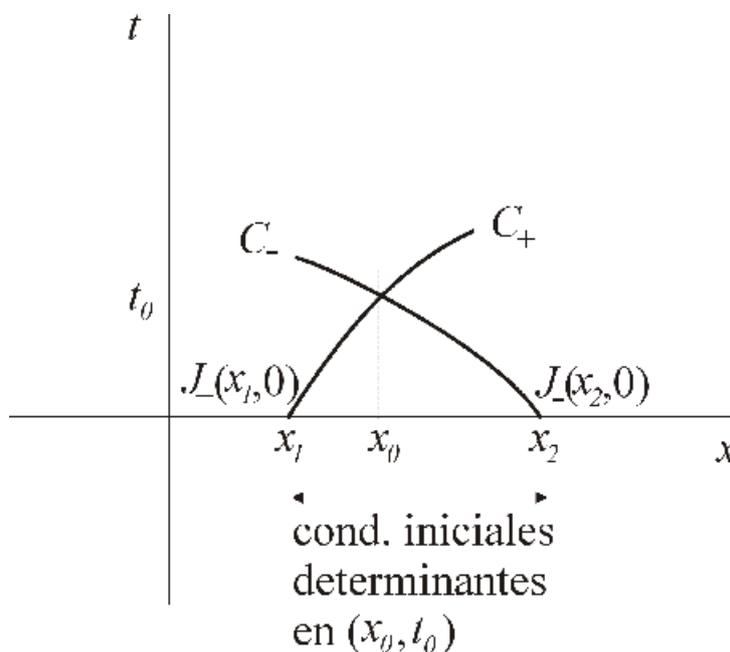
forman un sistema completo de ecuaciones equivalente al (6.1)-(6.3). La interpretación de (6.10) y (6.11) es, sin embargo, inmediata:  $J_+$  es constante a lo largo de la curva  $C_+$  definida en el plano  $(x, t)$  por

$$\frac{dx}{dt} = u + c, \quad (6.13)$$

mientras que  $J_-$  es constante a lo largo de la curva  $C_-$  definida por

$$\frac{dx}{dt} = u - c. \quad (6.14)$$

$C_{\pm}$  son las denominadas curvas características, y  $J_{\pm}$  los llamados invariantes de Riemann. Por cada punto  $(x_0, t_0)$  pasa una única  $C_+$  y una única  $C_-$ , cada una de ellas “transportando” el valor del invariante de Riemann  $J_+(x_1, 0)$  y  $J_-(x_2, 0)$ , respectivamente, determinados por las condiciones iniciales  $u(x, 0)$  y  $c(x, 0)$  a través de las relaciones (6.9).

Características en el plano  $(x,t)$ 

Invirtiendo estas relaciones se obtienen  $u(J_+, J_-)$  y  $c(J_+, J_-)$  y pueden entonces calcularse las características usando (6.13) y (6.14). Como  $J_+$  es constante sobre  $C_+$ , la forma de esta característica estará determinada por los distintos valores de  $J_-$  que encuentra en su camino, mientras lo complementario ocurre para  $C_-$ , lo que define el dominio de condiciones iniciales que determinan los valores de los campos en  $(x_0, t_0)$ .

Consideremos un tubo semiinfinito, limitado por un pistón móvil que, a partir de una posición inicial  $x_p = 0$ , describe una trayectoria  $x_p(t)$  prefijada. Si en  $t = 0$  el fluido se encuentra en la región  $x > 0$  y las condiciones iniciales son homogéneas, entonces el valor de todos los invariantes  $J_+$  que se originan en esa región es único y lo propio sucederá con los  $J_-$ . Así, todos los puntos del plano  $(x, t)$  en los que se interseccionen dos características provenientes de esta región tendrán iguales valores de  $J_+$  e iguales valores de  $J_-$ ; esto es, los valores de  $u$  y de  $c$  serán uniformes, iguales a los del fluido imperturbado, y corresponderán a los puntos del fluido que todavía no han sido perturbados por el movimiento del pistón.

En  $t > 0$  el fluido ocupa la región a la derecha de  $x_p(t)$  por lo que una curva característica  $C_-$  que se originase en el gas en contacto con el pistón estaría descrita por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_p}{dt} - c_p,$$

donde  $c_p$  es el valor de la velocidad del sonido correspondiente a las condiciones del fluido en contacto con el pistón, que es una magnitud definida

positiva. Sin embargo, es claro que tales características corresponderían a zonas a la izquierda del pistón (fuera de la región de fluido) por lo que sólo características  $C_+$  pueden emerger desde el pistón. Así, todas las características  $C_-$  provienen de regiones del semieje  $x > 0$  y transportan por lo tanto el mismo valor de  $J_-$ . En estas condiciones, como las curvas características  $C_+$  están dadas por (6.13)

$$\frac{dx}{dt} = u(J_+, J_-) + c(J_+, J_-), \quad (6.15)$$

y dado que  $J_+$  es constante por construcción sobre  $C_+$ , mientras que  $J_-$  es constante en todo el plano  $(x, t)$ , el lado derecho de (6.15) es entonces constante (aunque diferente en general para cada  $C_+$ ); esto es, las características  $C_+$  son rectas en el plano  $(x, t)$ :

$$x = (u + c)t + Cte, \quad (6.16)$$

donde la constante depende del valor de  $J_+$ .

De esta manera la solución exacta es muy sencilla de construir:

a) Usando (6.9) se calcula la forma explícita de  $J_{\pm}$ , que, como hay una relación unívoca entre  $c$  y  $\rho$ , conviene escribir como

$$J_{\pm} = u \pm G(c), \quad (6.17)$$

donde  $G(c)$  es el resultado de la integral en (6.9); en particular, para el caso de un gas perfecto de exponente adiabático  $\gamma$ , esta función es simplemente (probarlo)

$$G_{gp} = \frac{2c}{\gamma - 1}. \quad (6.18)$$

De (6.17) se tiene entonces

$$u = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad (6.19)$$

$$G(c) = \frac{1}{2}(J_+ - J_-). \quad (6.20)$$

b) Para condiciones iniciales homogéneas en  $x > 0$ :  $u(x, 0) = u_0$ ,  $c(x, 0) = c_0$ , por lo dicho más arriba, es

$$J_- = u_0 - G(c_0) = cte,$$

que al reemplazarse en (6.19) y (6.20) permite eliminar entre ambas a  $J_+$  para escribir

$$G(c) = u - u_0 + G(c_0),$$

que puede invertirse (es trivial en el caso del gas perfecto (6.18)) para dar

$$c = F(u, u_0, c_0). \quad (6.21)$$

c) Como las  $C_+$  son las rectas (6.16) tenemos

$$x = [u + F(u, u_0, c_0)]t + Cte, \quad (6.22)$$

que, como la pendiente es constante, indica que  $u$  debe ser constante sobre la característica. Para fijar la constante de integración basta aplicar (6.22) al gas en contacto con el pistón que, por condición de contorno, tiene igual velocidad que éste en un dado  $t_p$ :

$$Cte \equiv H(t_p) = x_p(t_p) - [u_p(t_p) + F(u_p(t_p), u_0, c_0)]t_p,$$

$x_p(t)$  es la trayectoria dada del pistón y, por supuesto,  $u_p(t) = dx_p/dt$ . De esta manera se obtiene finalmente

$$x = [u + F(u, u_0, c_0)]t + H(t_p). \quad (6.23)$$

Como  $u$  es constante sobre (6.22), para cada  $(x, t)$ , debe resolverse (6.23), evaluado en  $u = u_p(t_p)$ , para hallar el  $t_p$  correspondiente y obtener el  $u(x, t)$ ; conocido éste, de (6.21) se obtiene el campo  $c(x, t)$  y, usando la condición de homoentropía  $s(x, t) = s_0$ , pueden calcularse todas las magnitudes termodinámicas al conocerse dos de ellas:  $c$  y  $s$ .

Es interesante notar que el flujo de aguas poco profundas con fondo plano puede describirse por el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g\nabla h = 0,$$

donde  $h$  es la altura del fluido medida desde el fondo. En el caso unidimensional cartesiano (canal recto de sección constante) estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial h}{h \partial x} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $c^2 = gh$ . La comparación de estas ecuaciones con las (6.1) y (6.5) indica que todo el formalismo anterior puede aplicarse al caso mencionado haciendo la identificación  $\rho \leftrightarrow h$ , y tomando  $c = \sqrt{gh}$ . El cálculo inmediato

de los  $J_{\pm}$  correspondientes y su comparación con los de un gas ideal indica además que el flujo de aguas poco profundas corresponde al de un gas ideal de exponente adiabático  $\gamma = 2$ .

Particularmente sencilla es la solución del problema de la expansión súbita de un gas en el vacío (siempre dentro de un conducto de sección constante; por ejemplo, al quitar la división dentro de un tubo que separa una mitad que contiene gas de otra que se encuentra al vacío). Para el caso de aguas poco profundas el problema corresponde al rompimiento de un dique que contiene inicialmente al líquido quieto, y que se derrama luego sobre la parte inicialmente seca del canal.

Supongamos entonces que el gas (o líquido) se encuentran inicialmente en reposo y con magnitudes termodinámicas constantes en la zona de  $x < 0$ , y que en  $t = 0$  se quita súbitamente la barrera en  $x = 0$  que lo contiene. El frente que avanza entonces hacia la derecha, análogamente al caso del pistón, no emite características  $C_+$  dentro de la zona del plano  $(x, t)$  ocupada por el flujo, de manera que las únicas  $C_+$  provienen de la zona inicialmente ocupada por el gas (líquido) y llevan por lo tanto valores constantes  $J_+ = 2c_0/(\gamma - 1)$ , donde  $c_0$  es la correspondiente a las condiciones iniciales ( $c_0 = \sqrt{gh_0}$  para el líquido, con  $h_0$  la altura inicial). Conocido el valor de  $J_+$  se despeja de (6.19) y (6.20) la relación entre  $c$  y  $u$ :

$$c = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2}u. \quad (6.24)$$

Como en el frente la densidad (o altura) tienden a cero, la  $c$  correspondiente es nula y la velocidad del frente resulta de (6.24)  $u_F = 2c_0/(\gamma - 1)$ , que es entonces constante. Como  $J_+$  es uniforme las  $C_-$  resultan ser rectas; por otro lado, como  $c = 0$  en el frente, éste no emite  $C_-$  hacia la región del fluido en ningún  $t > 0$  (las  $C_-$  emitidas son paralelas al frente), por lo que todas las rectas  $C_-$  que corresponden a movimiento de fluido pasan por el origen del plano  $(x, t)$ . Así, las  $C_-$  tienen la expresión

$$x = (u - c)t = \left( \frac{\gamma + 1}{2}u - c_0 \right) t,$$

de donde se despeja

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} + c_0 \right), \quad (6.25)$$

expresión que es válida entre el frente  $x_F = 2c_0t/(\gamma - 1)$  y la característica  $C_-$  dada por  $x = -c_0t$ , que limita el fluido quieto del móvil. De (6.24) y (6.25) se deduce que

$$c = \frac{2c_0}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t}. \quad (6.26)$$

En particular, para el caso del rompimiento del dique es  $c = \sqrt{gh}$  y  $\gamma = 2$ , por lo que se deduce de (6.26)

$$h = \frac{4}{9}h_0 \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{gh_0}t}\right)^2.$$

## 6.2. Ondas de choque

Un punto muy importante es que las soluciones obtenidas en el caso del pistón móvil son válidas mientras no haya cruces de igual tipo de características. En efecto, si dos  $C_+$  se cruzaran en un dado punto  $(x, t)$  significaría que éste tendría dos valores distintos de  $J_+$ , esto es, el flujo sería multivaluado (recuérdese que el valor de  $J_-$  es constante, por lo que dos  $C_+$  pueden cruzarse sólo si tienen distintos valores de  $J_+$  y, por lo tanto, distintas pendientes). De la expresión de la pendiente de las  $C_+$  en (6.22):  $u + F(u, u_0, c_0)$  puede determinarse si puede haber cruce de estas características. En caso de que así fuera, la solución obtenida será válida sólo hasta cerca del instante en que se produzca el primer cruce: en las cercanías de este punto, a regiones muy cercanas del espacio le corresponderán valores muy distintos de  $J_+$  y, por lo tanto, de las distintas magnitudes del flujo; en estas condiciones, las derivadas espaciales son muy importantes y los efectos de viscosidad y conductividad térmica no pueden ignorarse. El efecto de éstos es impedir la formación de un flujo multivaluado y el resultado en el límite de viscosidad y conductividad térmica tendiendo a cero es un flujo discontinuo.

Imaginemos que la discontinuidad de las variables del flujo tiene lugar sobre una superficie, que es denominada onda o frente de choque, y tomemos un volumen de fluido en forma de pequeño cilindro que corte la superficie de discontinuidad con sus tapas paralelas a ella. Las leyes de conservación para dicho volumen se escriben genéricamente como

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int A dV + \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.27)$$

donde  $A$  y  $B$  son los “forzantes” de volumen y de superficie correspondientes al  $f(x, t)$  en cuestión. Note que para deducir (6.27) se deben suponer magnitudes continuas (se ha hecho uso de una expansión de Taylor); sin embargo, puede pensarse que dicha relación fue deducida para el flujo con viscosidad y conductividad finitas, y que luego éstas tienden a cero, sin alcanzar este valor estrictamente. El punto es que si la altura del cilindro tiende a cero manteniendo siempre una tapa de cada lado de la discontinuidad, las integrales de volumen en (6.27) no contribuyen por no diverger los integrandos mientras

el volumen tiende a cero. En el caso de  $A$  esto es claro, pero en el caso de  $\partial f/\partial t$ , para que el integrando no diverja debe pedirse que la discontinuidad esté quieta, dado que de otra manera el valor de  $f$  en un punto fijo del espacio dentro del volumen cambiaría discontinuamente al pasar por allí el frente de choque, y la derivada temporal divergería. Con esto, debe considerarse el sistema de referencia en el que el choque está instantáneamente en reposo, por lo que las velocidades indicadas son medidas en este referencial, donde basta evaluar las integrales de superficie considerando que las tapas tienen una superficie diferencial (la misma para ambas) lo que da simplemente

$$f_1 u_{1n} - B_{1n} = f_2 u_{2n} - B_{2n}, \quad (6.28)$$

donde 1 y 2 se refieren a cada lado de la superficie y  $u_n$  y  $B_n$  se refieren a la proyección sobre la dirección normal a la misma con sentido de 1 hacia 2.

Para la conservación de la masa es  $f = \varrho$  y  $\mathbf{B} = 0$ , con lo que se tiene

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n}. \quad (6.29)$$

Para la conservación de la cantidad de movimiento es  $f = \rho \mathbf{u}$  y  $\mathbf{B} = \overleftarrow{\mathbf{T}}$ , con lo que se tiene para la componente normal a la superficie

$$\rho_1 u_{1n} u_{1n} - T_{1nn} = \rho_2 u_{2n} u_{2n} - T_{2nn}, \quad (6.30)$$

mientras que para la componente tangencial a la superficie resulta

$$\rho_1 u_{1t} u_{1n} - T_{1tn} = \rho_2 u_{2t} u_{2n} - T_{2tn}. \quad (6.31)$$

Para la conservación de la energía es  $f = \rho(e + u^2/2)$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{u} \cdot \overleftarrow{\mathbf{T}}$ , con  $u^2 = u_n^2 + u_t^2$ , resultando

$$\rho_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_{1n} - \mathbf{u}_1 \cdot \overleftarrow{\mathbf{T}}_1 \cdot \mathbf{n} = \rho_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_{2n} - \mathbf{u}_2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{n}. \quad (6.32)$$

Para el caso de un fluido ideal en el que  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ , las tres últimas relaciones se escriben

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{1n}^2 + p_1 &= \rho_2 u_{2n}^2 + p_2, \\ \rho_1 u_{1t} u_{1n} &= \rho_2 u_{2t} u_{2n}, \\ \rho_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_{1n} + p_1 u_{1n} &= \rho_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_{2n} + p_2 u_{2n}, \end{aligned}$$

que, usando la conservación de la masa (6.29) escrita como

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n} = j, \quad (6.33)$$

se simplifican para dar

$$j u_{1n} + p_1 = j u_{2n} + p_2, \quad (6.34)$$

$$j u_{1t} = j u_{2t}, \quad (6.35)$$

$$j \left( h_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) = j \left( h_2 + \frac{u_2^2}{2} \right), \quad (6.36)$$

donde se ha usado la entalpía específica  $h = e + p/\rho$ .

Si no existe flujo de masa a través de la superficie de discontinuidad ( $j = 0$ ), las ecuaciones anteriores sólo imponen que  $p_1 = p_2$ , continuidad de los esfuerzos, mientras que las demás magnitudes pueden tener discontinuidades arbitrarias; este tipo de discontinuidad es denominada tangencial.

Para el caso más interesante de una discontinuidad no tangencial ( $j \neq 0$ ), se tiene por (6.35) que la velocidad tangencial debe ser continua:  $u_{1t} = u_{2t}$ , con lo que los términos de  $u_t^2$  se cancelan en (6.36) y se obtiene un conjunto de relaciones desacopladas para las componentes tangencial y normal:

$$u_{1t} = u_{2t}, \quad (6.37)$$

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n} = j, \quad (6.38)$$

$$j u_{1n} + p_1 = j u_{2n} + p_2, \quad (6.39)$$

$$h_1 + \frac{u_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{u_{2n}^2}{2}. \quad (6.40)$$

Si la velocidad no tiene componente tangencial a la discontinuidad, el choque se denomina normal; si existe componente tangencial no nula el choque es denominado oblicuo. Las relaciones (6.37)-(6.40) permiten determinar el flujo a un lado de la discontinuidad, conocidos sus valores en el otro. Nótese que a pesar de su aspecto “estacionario”, estas relaciones son válidas aun para flujos no estacionarios; la única precaución es que las velocidades del fluido son relativas al frente de choque, esto es, corresponden al sistema de referencia en el que el choque está instantáneamente en reposo, que puede cambiar instante a instante. Con esta misma consideración, por la continuidad de velocidades tangenciales, siempre puede elegirse un sistema de referencia en el que dicha componente de velocidad sea cero, esto es, en el que el choque sea normal; las relaciones de choque oblicuo pueden luego obtenerse cambiando apropiadamente de sistema de referencia.

Consideremos entonces un choque normal ( $u_{1t} = u_{2t} = 0$ ), por lo que en las expresiones (6.38)-(6.40) dejaremos de lado el subíndice  $n$  que es ahora redundante. Para fijar una convención útil, tomaremos a las magnitudes con subíndice 1 como las correspondientes al fluido que no ha sido afectado por

la onda de choque, que al ser actuado por ésta pasa a tener magnitudes con subíndice 2. Conviene además usar el volumen específico  $v = 1/\rho$  para simplificar las expresiones. De esta manera, escribimos usando (6.38)

$$u_{1,2} = \frac{j}{\rho_{1,2}} = jv_{1,2}. \quad (6.41)$$

Reemplazando  $u_{1,2}$  en (6.39) con (6.41) y reordenando se tiene

$$p_2 - p_1 = -j^2(v_2 - v_1), \quad (6.42)$$

lo que expresa que, en un diagrama termodinámico  $(v, p)$ , los estados del fluido a ambos lados del choque yacen sobre la recta (6.42), denominada recta de Rayleigh.

Si ahora reemplazamos  $u_{1,2}$  en (6.40) con (6.41) obtenemos luego de reordenar

$$h_2 - h_1 = -\frac{j^2}{2}(v_2^2 - v_1^2); \quad (6.43)$$

como

$$j^2(v_2^2 - v_1^2) = j^2(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = -(p_2 - p_1)(v_2 + v_1),$$

donde se ha usado (6.42) para escribir la última igualdad, (6.43) puede escribirse como

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(v_2 + v_1), \quad (6.44)$$

que se conoce como la curva adiabática de Rankine-Hugoniot, que puede ser trazada para cada sustancia en el plano  $(v, p)$  dando la expresión  $h(p, v)$ . La razón de la nomenclatura es que, de la definición  $h = e + pv$ , y de la relación de Gibbs  $de = -pdv + Tds$ , resulta inmediatamente que  $dh = Tds + vdp$ . En una evolución adiabática es entonces  $dh = vdp$ , mientras que, escribiendo en (6.44)  $h_2 = h_1 + \Delta h$ ,  $p_2 = p_1 + \Delta p$ , y  $v_2 = v_1 + \Delta v$ , se obtiene inmediatamente

$$\Delta h = v_1 \Delta p + \frac{1}{2} \Delta v \Delta p,$$

por lo que, para cambios infinitesimales, la evolución dada por (6.44) difiere de una adiabática “verdadera” (denominada de Poisson) en infinitésimos de orden dos. Sin embargo, los cambios de estado del fluido debidos a la onda de choque son finitos (están determinados por la intersección de (6.42) y (6.44)), con lo que llegamos a una conclusión importante: el choque produce un cambio de entropía en el fluido chocado; la evolución adiabática supuesta en el caso de no tener discontinuidades ya no es válida. Otra conclusión

importante es que, como fuera de la discontinuidad la conductividad térmica puede despreciarse, el fluido constituye un sistema térmicamente aislado por lo que su entropía no puede disminuir; el cambio producido por la onda de choque debe corresponder por lo tanto a un incremento de la entropía del fluido. Como veremos a continuación para un gas perfecto (y en general válido para las sustancias en que  $\partial^2 v / \partial p^2)_s > 0$ ), esto implica que el pasaje de la onda de choque comprime el gas; una onda de choque que descomprimiera el gas a su paso generaría un descenso de entropía en un sistema térmicamente aislado, lo que contradice el segundo principio de la termodinámica. En general, tenemos

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -v^2 \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = -v^2 \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{RH},$$

donde  $RH$  representa la adiabática de Rankine-Hugoniot, y la última igualdad es debido a que el contacto entre las adiabáticas de Poisson y de R-H es de segundo orden. De esta manera,

$$M_{1,2}^2 = \frac{u_{1,2}^2}{c_{1,2}^2} = -\frac{j^2}{\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right)_{RH\ 1,2}}. \quad (6.45)$$

Por la condición que los estados inicial y final estén simultáneamente sobre la recta de Rayleigh y sobre la adiabática de Rankine-Hugoniot, la (6.45) indica que en general para el gas no chocado es  $M > 1$ , mientras que para el chocado  $M < 1$ . Así, el choque se mueve en forma supersónica respecto del gas no afectado, y subsónica en el gas chocado.

Para el caso de un gas perfecto de exponente adiabático  $\gamma$  la velocidad del sonido es

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma p v, \quad (6.46)$$

con lo que, usando el número de Mach  $M \equiv u/c$ ,

$$j u_{1,2} = \rho_{1,2} u_{1,2}^2 = \rho_{1,2} c_{1,2}^2 M_{1,2}^2 = \gamma p_{1,2} M_{1,2}^2$$

y, al reemplazar en (6.39) se obtiene, luego de reordenar,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (6.47)$$

Por otro lado, de (6.41),

$$j^2 v_{1,2}^2 = u_{1,2}^2 = c_{1,2}^2 M_{1,2}^2 = \gamma p_{1,2} v_{1,2} M_{1,2}^2,$$

de donde

$$v_{1,2} = \frac{\gamma p_{1,2} M_{1,2}^2}{j^2},$$

y, por lo tanto,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2^2 p_2}{M_1^2 p_1} = \frac{M_2^2 (1 + \gamma M_1^2)}{M_1^2 (1 + \gamma M_2^2)}, \quad (6.48)$$

donde se usó (6.47).

Si se usa ahora la expresión de la entalpía específica del gas perfecto

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v,$$

puede escribirse (6.44) como

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (v_2 + v_1),$$

que al dividir ambos miembros por  $p_1 v_1$  se reescribe

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left( \frac{v_2}{v_1} + 1 \right).$$

Si en esta expresión se reemplazan las expresiones (6.47) y (6.48) se obtiene una expresión que contiene sólo a  $M_{1,2}$  que puede ser resuelta para  $M_2$  obteniéndose dos raíces; una es  $M_2 = M_1$ , que corresponde a variables continuas (solución trivial de las relaciones (6.38)-(6.40)); la solución de interés es

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}. \quad (6.49)$$

Esta expresión relaciona el número de Mach del gas chocado (2) con el del gas sin chocar (1). Como  $u_1$  es la velocidad del gas sin chocar en el sistema del choque, éste se mueve respecto al gas con velocidad  $-u_1$ , de manera que  $M_1^2$  puede interpretarse como el cuadrado del número de Mach del choque respecto al gas no chocado mientras que, análogamente,  $M_2^2$  corresponde al cuadrado del número de Mach del choque respecto al gas chocado. Puede verse fácilmente de (6.49) que si  $M_1 > 1 \Rightarrow M_2 < 1$ . En particular, si  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow M_2 \rightarrow (\gamma - 1)/(2\gamma)$ .

Reemplazando (6.49) en (6.47) y (6.48) se obtienen las relaciones útiles

$$p_2 = p_1 \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}, \quad (6.50)$$

$$v_2 = v_1 \frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{(\gamma + 1) M_1^2}, \quad (6.51)$$

$$T_2 = T_1 \frac{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) [(\gamma - 1) M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (6.52)$$

donde para la última se usó la relación de gas perfecto  $pv/T = cte$ . Estas expresiones relacionan las magnitudes del gas chocado con aquellas del gas sin chocar, y junto con (6.49) proporcionan el sistema completo de condiciones de salto a través de la discontinuidad.

Para el gas perfecto, la variación de entropía entre el estado del gas chocado y sin chocar está dada por

$$s_2 - s_1 = \frac{c_p}{\gamma} \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^\gamma \right],$$

que, por lo discutido más arriba, debe ser positiva, o sea,

$$\frac{p_2}{p_1} \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^\gamma > 1.$$

Si en esta condición se usan (6.50) y (6.51) se concluye que debe ser  $M_1^2 > 1$ ; esto es, el choque debe ser supersónico respecto al gas no chocado; además, de (6.50) se ve inmediatamente que debe ser  $p_2 > p_1$ .

Para el caso de aguas poco profundas el equivalente a la onda de choque se denomina salto hidráulico, que se manifiesta en una variación súbita de la altura del líquido, usualmente observada en las piletas de cocina. Para su estudio consideremos el sistema de referencia en el que el salto es estacionario, y suponemos que el líquido se mueve en ese sistema de izquierda a derecha. A la izquierda del salto (líquido no afectado) las magnitudes son  $h_1$  y  $u_1$ ; a la derecha (líquido que ha sufrido el salto) se tiene  $h_2$  y  $u_2$ . Si se usa un volumen de control que incluye la superficie libre del salto y se cierra por dos tapas, a izquierda y derecha del salto, la expresión integral de la conservación de la masa conduce inmediatamente a

$$u_1 h_1 = u_2 h_2. \quad (6.53)$$

Suponemos además que que sólo las fuerzas de presión y de gravedad afectan a la cantidad de movimiento (se desprecian fuerzas viscosas), lo que lleva a la condición integral sobre la superficie del volumen considerado

$$\oint \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \oint -p \mathbf{n} dS + \int \rho \mathbf{g} dV.$$

La componente horizontal de esta ecuación resulta en

$$u_1^2 h_1 + \frac{g}{2} h_1^2 = u_2^2 h_2 + \frac{g}{2} h_2^2, \quad (6.54)$$

donde debe tenerse cuidado de considerar la contribución de la presión externa  $p_0$  en las partes de la superficie libre con normal horizontal, y efectuar la integración de la presión hidrostática en cada tapa.

En este punto es útil introducir el análogo al número de Mach, que se denomina en este contexto número de Froude

$$F = \frac{u}{\sqrt{gh}}$$

el flujo con  $F < 1$  se denomina subcrítico y el correspondiente a  $F > 1$  supercrítico. Usando esta definición las (6.53) y (6.54) permiten despejar los valores de  $F$  a cada lado del salto

$$F_1^2 = \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \left( 1 + \frac{h_2}{h_1} \right), \quad F_2^2 = \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_2} \left( 1 + \frac{h_1}{h_2} \right),$$

por lo que si  $h_2/h_1 > 1$  es  $F_1 > 1$  y  $F_2 < 1$ ; esto es, el flujo del fluido no afectado por el salto es supercrítico y el del afectado subcrítico, lo que es análogo al caso del choque normal en gases. Por supuesto, la conclusión sería opuesta si fuese  $h_2/h_1 < 1$ ; veamos que esto no es posible, de manera que siempre la altura del fluido debe aumentar con el salto, y pasar de supercrítico a subcrítico. Para esto consideremos la conservación de la energía en su forma integral sobre el volumen antes considerado

$$\oint \rho \frac{u^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \oint -p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + W_g + W_D,$$

donde  $W_g$  es el trabajo hecho por la fuerza de gravedad y  $W_D$  es la energía disipada por unidad de tiempo que, a diferencia del caso de choque en gases, no puede despreciarse en este contexto. La evaluación de las integrales es inmediata;  $W_g$  es fácilmente calculable teniendo en cuenta que, por unidad de tiempo, ingresa al volumen de control un cantidad de masa  $\rho u_1 h_1$ , con centro de masa de altura  $h_1/2$ , y egresa  $\rho u_2 h_2$  con centro de masa de altura  $h_2/2$ , de manera que

$$W_g = \rho g u_1 h_1 \frac{h_1}{2} - \rho g u_2 h_2 \frac{h_2}{2},$$

que coincide con la expresión del trabajo de la presión, de manera que

$$\begin{aligned} W_D &= \frac{\rho}{2} (u_2^3 h_2 - u_1^3 h_1) + \rho g u_2 h_2^2 - \rho g u_1 h_1^2 = \\ &\rho u_2 h_2 \left( \frac{1}{2} u_2^2 + g h_2 \right) - \rho u_1 h_1 \left( \frac{1}{2} u_1^2 + g h_1 \right). \end{aligned}$$

Usando a (6.53) y (6.54) se puede reescribir  $W_D$  como

$$W_D = \frac{\rho u_1 g}{4h_2} (h_1 - h_2)^3.$$

Dado que debe ser  $W_D < 0$  por corresponder a una disipación, tenemos  $h_2 > h_1$ . Nótese que si se hubiera supuesto a priori que la disipación de energía podía ser despreciada (por ejemplo considerando que tiende a cero al tender a cero el volumen de la zona considerada) se obtendría  $h_2 = h_1$ , esto es, no habría salto. Mecanismos turbulentos son entonces necesarios en el salto para incrementar las pérdidas disipativas más allá de las posibles en un flujo laminar de baja viscosidad.

# Capítulo 7

## Flujo 2-D incompresible

Consideremos un sistema de coordenadas ortogonales, en general curvilíneas,  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Supongamos que un fluido incompresible se mueve contenido en superficies  $\gamma = cte$  y que su flujo no depende de  $\gamma$ . Elegimos ahora un volumen  $V$  limitado por dos superficies  $\gamma = \gamma_0$  y  $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$ , más una superficie lateral de generatrices perpendiculares a ambas superficies. Como  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  el teorema de Gauss aplicado a ese volumen es

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \oint_{S(V)} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

Como  $\mathbf{u} \perp \hat{\mathbf{n}}$  en las superficies  $\gamma = \gamma_0$  y  $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$ , la contribución a la integral de superficie se limita a la superficie lateral

$$\int_{Stat.} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

Llamando  $\mathcal{C}$  a la curva que es la intersección entre la superficie lateral y la superficie  $\gamma = \gamma_0$ , y  $d\mathbf{l}$  al vector diferencial de longitud a lo largo de  $\mathcal{C}$ , es  $dS = |d\mathbf{l}| \Delta h$ , con  $\Delta h$  la “altura” local de la superficie lateral. En el límite en que  $\Delta h \rightarrow 0$ , podemos escribir  $\Delta\gamma = |\nabla\gamma| \Delta h$  con todo lo cual

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} |d\mathbf{l}| \frac{\Delta\gamma}{|\nabla\gamma|} = 0.$$

Dado que  $\Delta\gamma$  es constante, y que

$$\frac{\hat{\mathbf{n}} |d\mathbf{l}|}{|\nabla\gamma|} = \frac{d\mathbf{l} \times \nabla\gamma}{|\nabla\gamma|^2},$$

podemos escribir

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \nabla\gamma}{|\nabla\gamma|^2} = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \cdot \frac{\nabla\gamma \times \mathbf{u}}{|\nabla\gamma|^2} = 0,$$

donde en la expresión intermedia se usó la conmutatividad cíclica del producto mixto. De esta expresión deducimos entonces que, como  $\mathcal{C}$  es cerrada, pero arbitraria, el integrando debe ser un diferencial exacto, o sea,

$$\frac{\nabla\gamma \times \mathbf{u}}{|\nabla\gamma|^2} = \nabla\psi.$$

Multiplicando vectorialmente a derecha esta igualdad por  $\nabla\gamma$  obtenemos inmediatamente que

$$\mathbf{u} = \nabla\psi \times \nabla\gamma. \quad (7.1)$$

La función escalar  $\psi(\alpha, \beta)$  es la llamada función de corriente. Es claro de (7.1) que  $\mathbf{u} \perp \nabla\psi$  por lo que las líneas  $\psi = cte$  son líneas de corriente. Además, el caudal  $\Delta Q$  a través de una superficie de altura  $\Delta h$ , perpendicular a las superficies  $\gamma = \gamma_0$  y  $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$ , que intersecta al plano  $\gamma = \gamma_0$  en una curva  $\mathcal{C}$ , en general no cerrada, es

$$\Delta Q = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} |d\mathbf{l}| \Delta h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \nabla\gamma}{|\nabla\gamma|^2} \Delta\gamma = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \cdot \nabla\psi \Delta\gamma = \Delta\psi \Delta\gamma,$$

con  $\Delta\psi$  la diferencia del valor de  $\psi$  entre los extremos de la curva. Esto vale en el límite  $\Delta h \rightarrow 0$ , por lo que, con más propiedad,  $\Delta\psi = \Delta Q / \Delta\gamma$ , es el caudal por unidad de “coordenada perpendicular  $\gamma$ ”. Convencionalmente se toma el caudal que atraviesa la curva de izquierda a derecha, mientras se recorre la curva del punto inicial  $A$  al final  $B$ :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta\gamma} = \psi(B) - \psi(A).$$

Finalmente, notemos que puede a veces agregarse una componente de velocidad perpendicular al flujo plano (paralela a  $\nabla\gamma$ ) que no dependa de  $\gamma$ , para escribir

$$\mathbf{u} = \nabla\psi \times \nabla\gamma + J\nabla\gamma.$$

Como el primer término cumple por construcción que su divergencia es nula, el término agregado debe satisfacer

$$\nabla \cdot (J\nabla\gamma) = \nabla J \cdot \nabla\gamma + J\nabla^2\gamma = 0.$$

En coordenadas curvilíneas ortogonales, al ser  $J(\alpha, \beta)$ , es  $\nabla J \cdot \nabla\gamma = 0$  idénticamente, por lo que se requiere que  $\nabla^2\gamma = 0$ . Esta última condición no se cumple, por ejemplo, si  $\gamma$  es una coordenada radial cilíndrica o esférica.

## 7.1. Aplicación a la ecuación de Navier-Stokes

Consideremos la ecuación de Navier-Stokes para un fluido homogéneo e incompresible, con fuerzas de masa potenciales

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \nabla \varphi_M + \nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Si consideramos un flujo muy lento y muy viscoso en el que  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  puede despreciarse frente a  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$  (el llamado límite de número de Reynolds tendiendo a cero)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \varphi_M \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (7.2)$$

al tomar el rotor de (7.2), y usar que

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (7.3)$$

junto con

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,$$

se obtiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (7.4)$$

En un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales podemos escribir en general que

$$d\mathbf{x} = h_\alpha d\alpha \mathbf{e}_\alpha + h_\beta d\beta \mathbf{e}_\beta + h_\gamma d\gamma \mathbf{e}_\gamma,$$

donde  $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma)$  forman una terna ortonormal derecha local, y  $h_\alpha, h_\beta,$  y  $h_\gamma$  son funciones positivas que dependen de las coordenadas  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Usando que, para una función escalar  $\phi$  vale que

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \phi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} d\gamma \\ &= \nabla \phi \cdot d\mathbf{x} = \nabla_\alpha \phi h_\alpha d\alpha + \nabla_\beta \phi h_\beta d\beta + \nabla_\gamma \phi h_\gamma d\gamma, \end{aligned}$$

que debe ser además válido para  $d\alpha, d\beta$  y  $d\gamma$  arbitrarios, tenemos que  $\nabla \phi$  en el sistema curvilíneo es

$$\nabla \phi = \frac{\mathbf{e}_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\mathbf{e}_\beta}{h_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{e}_\gamma}{h_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}. \quad (7.5)$$

Del teorema de la divergencia aplicado a un volumen infinitesimal tenemos que, para un campo vectorial  $\mathbf{A}$ , es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Usando además que para un elemento de volumen infinitesimal con caras sobre las superficies coordenadas tenemos que

$$\Delta V = h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma,$$

y que, por ejemplo, el elemento de superficie contenido en la superficie  $\gamma = cte$  es

$$dS = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta,$$

con expresiones análogas para los otros elementos de superficie, podemos ver fácilmente que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta h_\gamma A_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha h_\gamma A_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha h_\beta A_\gamma) \right]. \quad (7.6)$$

El laplaciano de un campo escalar puede entonces escribirse, de (7.5) y (7.6),

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \right]. \quad (7.7)$$

Finalmente, del teorema de Stokes para una curva infinitesimal  $C$  formada por líneas coordenadas sobre la superficie  $\alpha = cte$  (que encierra la superficie  $\Delta S$  con normal  $\mathbf{e}_\alpha$ ) podemos escribir que la componente  $\alpha$  del rotor de un campo vectorial  $\mathbf{A}$  es

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\alpha = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Evaluando el lado derecho obtenemos fácilmente que (con análogos razonamientos para las otras componentes)

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_\alpha &= \frac{1}{h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\gamma A_\gamma) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\beta A_\beta) \right], \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\beta &= \frac{1}{h_\alpha h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha A_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\gamma A_\gamma) \right], \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\gamma &= \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta A_\beta) - \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha A_\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

De (7.1) y (7.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left( \frac{\mathbf{e}_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\mathbf{e}_\beta}{h_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) \times \frac{\mathbf{e}_\gamma}{h_\gamma} \\ &= \frac{\mathbf{e}_\alpha}{h_\beta h_\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{\mathbf{e}_\beta}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Si a esta expresión le tomamos el rotor, usando las (7.8), tenemos que si

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\alpha}{h_\beta h_\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\beta}{h_\alpha h_\gamma} \right) = 0, \quad (7.10)$$

que es una condición que se cumple en casos importantes, el rotor sólo tiene componente  $\gamma$ , y vale

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = -\mathcal{D}^2 \psi \frac{\mathbf{e}_\gamma}{h_\gamma} = -\mathcal{D}^2 \psi \nabla \gamma, \quad (7.11)$$

donde se definió el operador “D-cuadrado”

$$\mathcal{D}^2 \equiv \frac{h_\gamma}{h_\alpha h_\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_\beta}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_\alpha}{h_\beta h_\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) \right]. \quad (7.12)$$

Como

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla (\mathcal{D}^2 \psi) \times \nabla \gamma, \quad (7.13)$$

por ser  $\nabla \times (\nabla \gamma) = 0$ , al evaluar  $\nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ , tenemos inmediatamente, comparando con (7.11) escrita como

$$\nabla \times (\nabla \psi \times \nabla \gamma) = -\mathcal{D}^2 \psi \nabla \gamma,$$

que

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = \nabla \times [\nabla (\mathcal{D}^2 \psi) \times \nabla \gamma] = -\mathcal{D}^2 (\mathcal{D}^2 \psi) \nabla \gamma.$$

Con esta expresión y (7.11), podemos escribir la (7.4) como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \mathcal{D}^2 \right) \mathcal{D}^2 \psi = 0. \quad (7.14)$$

Veamos ahora casos particulares. En coordenadas cilíndricas es  $d\mathbf{x} = dR \mathbf{e}_R + R d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z$ , con lo que  $h_R = 1$ ,  $h_\varphi = R$  y  $h_z = 1$ . Vemos entonces que las condiciones (7.10) para definir el operador  $\mathcal{D}^2$  se verifican si  $\gamma = z$  o  $\gamma = \varphi$  (no si  $\gamma = R$ ). En particular, si  $\gamma = z$  se ve de inmediato que  $\mathcal{D}^2 = \nabla^2$ . Si  $\gamma = \varphi$  tenemos, de (7.9),

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (7.15)$$

mientras que

$$\mathcal{D}^2 = R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (7.16)$$

En coordenadas esféricas es  $d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi$ , con lo que  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$  y  $h_\varphi = r \sin \theta$ . Vemos entonces que las condiciones (7.10) para definir el operador  $\mathcal{D}^2$  se verifican si  $\gamma = r$  o  $\gamma = \varphi$  (no si  $\gamma = \theta$ ). Tenemos en este caso

$$\mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (7.17)$$

y

$$\mathcal{D}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (7.18)$$

En el caso simple de coordenadas cartesianas, con  $\gamma = z$ , es  $h_x = h_y = h_z = 1$ , con lo que  $\mathcal{D}^2 = \nabla^2$  y

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y,$$

### 7.1.1. Problema de Stokes

Usemos el formalismo anterior para calcular el flujo viscoso lento alrededor de una esfera quieta, de radio  $a$ , embestida por un flujo que es uniforme al infinito. Tomemos el origen del sistema de coordenadas en el centro de la esfera, y el flujo muy lejos ( $r \rightarrow \infty$ ) en la dirección del eje  $z$

$$\mathbf{u} \rightarrow U \hat{\mathbf{e}}_z = U(\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta).$$

Una integración inmediata de (7.17) nos dice entonces que, para  $r \rightarrow \infty$ , la función de corriente es

$$\psi \rightarrow \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta. \quad (7.19)$$

Debemos ahora resolver la ecuación (??) con (7.18), para el caso estacionario, con la condición (7.19) para  $r \rightarrow \infty$ , y la condición  $\mathbf{u}(r = a) = \mathbf{0}$  que se escribe de (7.17) como

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0. \quad (7.20)$$

La forma de (7.19) nos sugiere probar una solución de la forma

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta. \quad (7.21)$$

Es inmediato ver entonces que

$$\mathcal{D}^2 \psi = \left( \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^2} \right) \sin^2 \theta,$$

y que la ecuación (7.14) estacionaria,  $\mathcal{D}^2(\mathcal{D}^2\psi) = 0$ , se reduce a

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} - 4r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 8r \frac{df}{dr} - 8f = 0.$$

Esta ecuación es homogénea con soluciones de la forma  $f \sim r^\alpha$ , que al ser introducidas en la ecuación conducen a la condición

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) - 4\alpha(\alpha - 1) + 8(\alpha - 1) = 0,$$

de la que se obtienen inmediatamente los valores del exponente  $\alpha = -1, 1, 2, 4$ . O sea,

$$f = Ar^4 + Br^2 + Cr + Dr^{-1}.$$

De la condición (7.19) debe ser  $A = 0$  y  $B = U/2$ . Las condiciones (7.20) se escriben

$$f(r = a) = \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=a} = 0,$$

que conducen inmediatamente a que  $C = -3Ua/4$  y  $D = Ua^3/4$  con lo cual

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (7.22)$$

con lo que el campo de velocidades dado por (7.17) es

$$u_r = U \cos \theta \left( 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (7.23)$$

$$u_\varphi = -U \sin \theta \left( 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right). \quad (7.24)$$

Para calcular la presión, de (7.2) estacionaria y sin fuerzas de masa,

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Usando (7.13) es

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \mathcal{D}^2 \psi \times \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{r \sin \theta},$$

que conduce a (con  $\mu = \rho\nu$ ) (también puede calcularse directamente el laplaciano de  $\mathbf{u}$ )

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \Big|_r = \frac{3\mu U a \cos \theta}{r^3},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \nabla^2 \mathbf{u})_{\theta} = \frac{3\mu U a \sin \theta}{2r^3},$$

que se integran fácilmente para dar

$$p = p_{\infty} - \frac{3\mu U a \cos \theta}{2r^2}. \quad (7.25)$$

Finalmente, para calcular la fuerza que sufre la esfera, debemos integrar sobre su superficie el esfuerzo correspondiente a la normal de la misma  $\mathbf{t} = \overleftarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_R = -p\hat{\mathbf{e}}_R + \overleftarrow{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_R$ , que tiene componentes

$$t_R = \left( -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=a}, \quad (7.26)$$

$$t_{\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right)_{r=a}. \quad (7.27)$$

Por la simetría del problema es de esperar que la fuerza tenga sólo componente  $z$ , cuya expresión es

$$F_z = \int (t_r \cos \theta - t_{\theta} \sin \theta) dS.$$

Con  $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ , la integral es fácilmente calculable usando (7.23), (7.24), (7.25), (7.26) y (7.27), con el resultado

$$F_z = 6\pi\mu U a.$$

Del total de la fuerza, una parte, de valor  $2\pi\mu U a$ , resulta de la contribución de la presión que, al tener una distribución asimétrica entre proa y popa de la esfera, no se anula como sería el caso de un fluido ideal. La contribución restante de valor  $4\pi\mu U a$  está dada por las fuerzas viscosas puramente tangenciales a la superficie de la esfera dadas por  $t_{\theta}$ , ya que  $\partial u_R / \partial r$  se anula en  $r = a$ .

# Capítulo 8

## Flujo 2-D potencial

Hemos visto que cuando el flujo es barotrópico y las fuerzas conservativas, en las regiones donde los esfuerzos viscosos son despreciables (fuera de las capas límites), si el flujo es inicialmente irrotacional continuará siéndolo (posibles excepciones son debidas a la convección de vorticidad provenientes de regiones donde ésta se genera, como las capas límites). De esta manera, la hipótesis de irrotacionalidad es adecuada muchas veces. Por otro lado, un caso muy importante de barotropía es el de fluido incompresible, hipótesis también razonable si las velocidades relativas entre elementos del flujo son pequeñas comparadas con las del sonido.

Consideremos entonces el caso de fluido ideal (fluido real poco viscoso lejos de contornos), incompresible y con flujo irrotacional. De la última condición  $\mathbf{u}$  puede escribirse como el gradiente de un potencial

$$\mathbf{u} = \nabla\phi, \quad (8.1)$$

mientras que la condición de incompresibilidad corresponde a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2\phi = 0, \quad (8.2)$$

de manera que el campo de velocidades puede determinarse resolviendo la ecuación de Laplace para el potencial  $\phi$ . Las condiciones de contorno apropiadas para la existencia y unicidad de las soluciones de esta ecuación están bien establecidas. En el caso que nos interesa éstas son del tipo de Neumann sobre contornos con normal  $\mathbf{n}$

$$u_n = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = U_n, \quad (8.3)$$

donde  $U_n$  es la componente de la velocidad normal al contorno, que es dato; ya sea porque es fijada por un contorno sólido (se entiende que fuera de su capa límite, por lo que la velocidad tangencial es libre), o dada por ejemplo

en el borde del recinto por el que ingresa fluido con velocidad dada. Si el recinto es ilimitado deben darse condiciones de regularidad en  $\infty$ , tal como  $|\nabla\phi| \rightarrow 0$ .

Así, la distribución de velocidades se obtiene sin hacer uso de la ecuación dinámica, la misma se utiliza para calcular la presión. En efecto, con las condiciones usadas la ecuación de movimiento tiene una integral de Bernoulli de la forma

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_m = C(t),$$

por lo que conocidos  $\phi$  y el potencial de fuerzas de masa  $\varphi_m$  se puede calcular el campo de presión

$$p = \rho C(t) - \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \varphi_m \right),$$

en la que  $C(t)$  se determina conociendo la presión en algún punto, típicamente en el infinito (lejos de la zona de interés).

Existe una metodología especialmente poderosa para resolver este tipo de problemas cuando el flujo es además bidimensional plano. Por ser incompresible sabemos del caso general curvilíneo que existe una función de corriente  $\psi$ , que para el caso de velocidad en el plano  $(x, y)$  que dependa de sólo estas coordenadas permite escribir ( $\mathbf{k}$  es el versor en la dirección  $z$ )

$$\mathbf{u} = \nabla\psi \times \mathbf{k}. \quad (8.4)$$

De (8.1) y (8.4) podemos escribir en componentes

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ u_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Las relaciones entre derivadas de  $\phi$  y  $\psi$  corresponden a las condiciones de Cauchy-Riemann para las partes real e imaginaria de una función de variable compleja  $Z = x + iy$

$$w(Z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (8.6)$$

que indica que  $w$  es función de sólo  $Z$  y no, como correspondería a un simple cambio de variables, función de  $Z$  y de su conjugado  $Z^*$ . Este resultado es muy importante porque reduce el problema de funciones de dos variables a uno de funciones de una sola variable, con el agregado de posibilitar el uso del análisis complejo.

Aprovechando la dependencia en  $Z$  de (8.6) podemos calcular la derivada a lo largo de cualquier dirección en el plano complejo; tomando la dirección a lo largo del eje real  $x$  es

$$\frac{dw}{dZ} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = u_x - i u_y = u^*, \quad (8.7)$$

donde se usaron las (8.5) y se asignó al vector plano  $(u_x, u_y)$  el número complejo  $u = u_x + i u_y$ . Se ve entonces que  $w$  es un potencial, cuya derivada proporciona la velocidad conjugada, razón por lo que se denomina a  $w$  potencial complejo.

Estudiemos ahora el flujo bidimensional producido en un recinto ilimitado por la acción de las llamadas singularidades, que son puntos del plano donde las velocidades divergen. La importancia de estas singularidades es que si el flujo que produce cada una de ellas es irrotacional, la superposición de ellas produce también un flujo irrotacional. Esto puede verse rodeando cada singularidad con una pequeña circunferencia cuyo radio tienda a cero, y notando que al diverger la velocidad sobre la singularidad, ésta impone una condición de contorno de Neumann sobre la circunferencia (la contribución del resto de las singularidades sobre la circunferencia que rodea a una dada es despreciable).

El caso más simple corresponde a un flujo uniforme  $U$ , cuyo potencial complejo es (de la integral elemental de (8.7))

$$w(Z) = U^* Z, \quad (8.8)$$

la singularidad se encuentra en  $Z = \infty$ .

Consideremos el caso del flujo producido por una singularidad puntual que emite isótopamente un caudal  $Q$  (por unidad de longitud perpendicular al plano). Escribiendo el  $\nabla\psi$  en coordenadas polares centradas en la singularidad, la ecuación (8.4) nos permite deducir

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ u_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Como el flujo es isótropo, la magnitud de la velocidad no puede depender de  $\theta$ ; como además, por la condición de incompresibilidad, el flujo debe tener caudal neto igual a  $Q$  a través de toda curva cerrada que rodee al origen, la componente  $r$  debe ser distinta de cero (basta calcular el flujo a través de una circunferencia centrada en el origen). Integrando la primera de las (8.9) con esta condición tenemos

$$\psi = \frac{Q\theta}{2\pi} + C(r). \quad (8.10)$$

Como además el flujo debe ser irrotacional, es en general

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla\psi \times \mathbf{k}) = -\mathbf{k}\nabla^2\psi = 0,$$

por lo que al anular el laplaciano de (8.10) obtenemos la condición

$$C(r) = A \ln r + B,$$

con  $A$  y  $B$  constantes. La constante  $B$  puede tomarse igual a cero (sólo interesan derivadas de  $\psi$ ), mientras que si calculamos la circulación a lo largo de una circunferencia centrada en el origen tenemos

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta = -2\pi A.$$

Como el campo de velocidades es irrotacional, su circulación alrededor de cualquier curva que rodee a la singularidad es la misma, por lo que tenemos en general

$$\psi = \frac{Q\theta}{2\pi} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (8.11)$$

Usando que  $\psi = \text{Im}(w)$  y que  $Z = r \exp(i\theta)$ , podemos escribir de (8.11) (generalizando además para una singularidad ubicada en  $Z_0$ )

$$w(Z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln(Z - Z_0).$$

Si  $\Gamma = 0$  tenemos una fuente (lineal) isótropa de caudal  $Q$ . Si  $Q = 0$ , tenemos un vórtice isótropo de circulación  $\Gamma$ .

Para concluir con las singularidades consideremos el caso del dipolo, formado por un sumidero (fuente de caudal negativo) en  $Z_0$  con caudal  $-Q$ , y una fuente de caudal  $Q$  en  $Z_0 + \Delta Z$ :

$$\begin{aligned} w(Z) &= -\frac{Q}{2\pi} \ln(Z - Z_0) + \frac{Q}{2\pi} \ln(Z - Z_0 - \Delta Z) \\ &= \frac{Q}{2\pi} \ln \left[ 1 - \frac{\Delta Z}{Z - Z_0} \right] \rightarrow -\frac{Q\Delta Z}{2\pi(Z - Z_0)}, \end{aligned}$$

donde al final se usó el límite de  $\Delta Z \rightarrow 0$ . Llamando  $\mu$  al valor finito de  $Q\Delta Z$  cuando  $\Delta Z \rightarrow 0$  con  $Q \rightarrow \infty$ , es

$$w(Z) = -\frac{\mu}{2\pi(Z - Z_0)}. \quad (8.12)$$

Hasta aquí hemos estudiado el flujo producido en recintos ilimitados; para incluir contornos existen técnicas especiales que introduciremos ahora.

Consideremos primero que el flujo producido por distintas singularidades está limitado a un semiplano; si la recta que limita el recinto es estática, la condición de contorno sobre ella es que la velocidad normal a la misma es cero; en otras palabras, que la recta es una línea de corriente. Existe una manera sistemática de asegurar esto si hacemos coincidir el contorno con la recta real  $y = 0$ . Imaginemos que el flujo tiene lugar en el semiplano superior  $y > 0$ . Llamemos  $w_0(Z)$  al potencial generado por las mismas singularidades en un recinto ilimitado;  $w_0$  es entonces simplemente la superposición de los  $w$  correspondientes a cada singularidad por separado. Consideremos ahora la siguiente expresión

$$w(Z) = w_0(Z) + \bar{w}_0(Z), \quad (8.13)$$

donde la barra en  $\bar{w}_0$  indica la operación de conjugar todos los parámetros de la función  $w_0$  con la excepción de su argumento  $Z$ ; así, por ejemplo, para el potencial de un dipolo (8.12) tenemos

$$\bar{w}(Z) = -\frac{\mu^*}{2\pi(Z - Z_0^*)}.$$

De esta manera, si evaluamos (8.13) sobre el eje real  $Z = x$ , como sólo sobre él es  $Z = Z^*$  tenemos que

$$\bar{w}_0(Z) = \bar{w}_0(Z^*) = w_0(Z)^*, \quad Z = x.$$

De esta manera en el eje real la parte imaginaria de  $w(Z)$ ,  $\psi$ , es cero, por lo que dicho eje es una línea de corriente, es decir, se satisface la condición de contorno. Por otro lado, si una singularidad cualquiera de  $w_0(Z)$  está ubicada en  $Z_0$  (por hipótesis por encima del eje real), la correspondiente de  $\bar{w}_0(Z)$  estará en  $Z_0^*$ , esto es, por debajo del eje real. Así, el agregado de  $\bar{w}_0(Z)$  no introduce nuevas singularidades en el recinto original, por lo que todo punto externo a las singularidades originales seguirá siendo regular y las singularidades originales no se verán alteradas (en las cercanías de ellas seguirán imponiendo las mismas condiciones de flujo). Por la unicidad de la solución de la ecuación de Laplace, el potencial (8.13) es la solución buscada. Éste es el método de las imágenes, que reemplaza la solución limitada por contornos, por una en un recinto ilimitado donde se agregan imágenes de las singularidades originales, que simulen la condición de contorno.

Otro tipo de contorno que puede simularse en forma análoga es el de un círculo estático, de radio  $a$  centrado en el origen. Nuevamente, si  $w_0(Z)$  es el potencial en ausencia del círculo (recinto ilimitado), entonces el potencial que incluye el contorno circular se puede escribir (teorema del círculo)

$$w(Z) = w_0(Z) + \bar{w}_0\left(\frac{a^2}{Z}\right). \quad (8.14)$$

Sobre el contorno  $Z = a \exp(i\theta)$  se tiene  $Z^* = a \exp(-i\theta) = a^2/Z$ , por lo que sobre él  $w$  es real, o sea  $\psi = 0$ . Además, si una singularidad original de  $w_0(Z)$  está ubicada en  $Z_0$  (por hipótesis en  $|Z| > a$ ), la dependencia correspondiente en  $Z$  será de la forma  $Z - Z_0$ , que corresponde en el término en  $\bar{w}_0$  a  $a^2/Z - Z_0^* = -Z_0^*(Z - a^2/Z_0^*)/Z$ , por lo que la nueva singularidad estará ubicada en  $a^2/Z_0^*$  cuyo módulo es claramente menor que  $a$ .

Un punto importante es que, como el recinto donde tiene lugar el flujo es múltiplemente conexo, la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada que contenga al círculo (y ninguna singularidad tipo vórtice) es la misma (esto se prueba fácilmente con el teorema de Stokes; asimismo se prueba que la circulación sobre curvas cerradas que no contienen ni al círculo ni a vórtices es cero). Dicha circulación es arbitraria, y para determinarla debe darse como dato. Digamos que vale  $\Gamma$ ; la forma de incorporarla es agregando a (8.14) un vórtice en el origen, que por tener líneas de corriente circulares no altera la condición que el círculo de radio  $a$  es una línea de corriente. Esto es,

$$w(Z) = w_0(Z) + \bar{w}_0 \left( \frac{a^2}{Z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln Z. \quad (8.15)$$

Vemos entonces que contornos planos y circulares (quietos ambos) son muy sencillos de simular. Para contornos más generales se utiliza el método de transformación conforme. La idea es la siguiente; imaginemos el flujo producido en el plano  $Z$  por distintas singularidades en presencia de un contorno genérico, con potencial correspondiente (desconocido y a calcular)  $w(Z)$ . Si hacemos un cambio de variable de  $Z$  a  $\zeta$ , mediante la función analítica  $Z(\zeta)$ , el potencial en el plano  $\zeta$  será  $\tilde{w}(\zeta) = w[Z(\zeta)]$ .

En los puntos donde  $dZ/d\zeta \neq 0, \infty$  se dice que la transformación es conforme. La razón de esto se ve al analizar cómo se transforma el ángulo entre dos segmentos infinitesimales,  $dZ$  y  $dZ'$ , con origen en el mismo punto  $Z_0$ . El ángulo que forman está dado por (usando el teorema del coseno)

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{dZ dZ'^* + dZ^* dZ'}{\sqrt{dZ dZ^*} \sqrt{dZ' dZ'^*}}, \quad (8.16)$$

mientras que el ángulo entre los segmentos transformados  $d\zeta = dZ/(dZ/d\zeta)_{\zeta_0}$  y  $d\zeta' = dZ'/(dZ/d\zeta)_{\zeta_0}$  ( $\zeta_0$  es el transformado de  $Z_0$ ) está dado por la misma expresión (8.16) con  $d\zeta$  y  $d\zeta'$  en lugar de  $dZ$  y  $dZ'$ . Es inmediato que el ángulo es el mismo, por lo que un polígono infinitesimal se transformará en un polígono de igual forma (con ángulos iguales), aunque sus lados pueden haberse estirado o contraído y además haber rotado ya que en general  $(dZ/d\zeta)_{\zeta_0} \neq 1$ . Nóte que es esencial que  $(dZ/d\zeta)_{\zeta_0} \neq 0, \infty$ .

¿Cómo se transforman las singularidades estudiadas?

Para el flujo uniforme  $U$  tenemos para  $Z \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{w}(\zeta) \rightarrow U^*Z(\zeta)$  por lo que se reobtendrá el flujo uniforme original en el plano transformado  $\zeta$  sólo si  $Z(\zeta) \rightarrow \zeta$  para  $Z \rightarrow \infty$ .

Para estudiar una singularidad al finito, ubicada en  $Z_0$ , escribamos (la prima simboliza ahora derivada respecto de  $\zeta$ )

$$Z(\zeta) = Z_0 + Z'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{2}Z''(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)^2 + O[(\zeta - \zeta_0)^3],$$

de donde tenemos ( $Z'(\zeta_0) \neq 0, \infty$ )

$$Z - Z_0 = Z'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{Z''(\zeta_0)}{Z'(\zeta_0)} (\zeta - \zeta_0) + O[(\zeta - \zeta_0)^2] \right\}. \quad (8.17)$$

Así, para una singularidad tipo fuente o vórtice, cuando  $Z \rightarrow Z_0$  ( $\zeta \rightarrow \zeta_0$ ) se tiene

$$\ln(Z - Z_0) \rightarrow \ln(\zeta - \zeta_0) + cte,$$

por lo que fuentes o vórtices se transforman en fuentes o vórtices de igual magnitud ubicados en  $\zeta_0$ .

Para un dipolo de valor  $\mu$ , vemos de (8.17) que obtenemos un dipolo en  $\zeta_0$  pero de valor  $\mu/Z'(\zeta_0)$ .

Vemos entonces que la transformación de singularidades es elemental. Lo que nos hace falta ahora es que el contorno original se transforme en un contorno sencillo, típicamente un círculo o un plano. Aunque pueden encontrarse tablas de transformaciones, no existe método general para determinar la transformación, salvo en el caso que el recinto en el plano  $Z$  sea poligonal, donde puede usarse el método de Schwartz-Christoffel para construir la transformación al semiplano  $\text{Im}(\zeta) > 0$ .

Imaginemos que tenemos la transformación; en el plano  $\zeta$  el contorno es, por ejemplo, un círculo. Las singularidades del plano original se transforman en singularidades conocidas en puntos determinados. De esta manera el potencial  $\tilde{w}(\zeta)$  se calcula por los métodos vistos arriba, y el potencial en el plano  $Z$  se obtiene finalmente por la transformación inversa:  $w(Z) = \tilde{w}[\zeta(Z)]$ .

Un ejemplo de importancia es la transformación de Kutta-Joukowski

$$Z(\zeta) = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}, \quad (8.18)$$

donde  $a$  es una longitud (real). Nótese que cuando  $\zeta \rightarrow \infty$ ,  $Z = \zeta$ , por lo que (8.18) preserva el flujo uniforme a grandes distancias. Si en el plano  $\zeta$  se tiene una circunferencia de radio  $b > a$  centrada en el origen ( $\zeta_c = b \exp(i\theta)$ ), ésta corresponde en el plano  $Z$  al contorno dado por

$$Z_c = b \exp(i\theta) + \frac{a^2}{b} \exp(-i\theta),$$

que es una elipse centrada en el origen de radio mayor  $b + a^2/b$ , sobre el eje  $x$ , y radio menor  $b - a^2/b$  sobre el eje  $y$ . Si  $b \rightarrow a$  la elipse degenera en un segmento de largo  $4a$ . Así, el flujo alrededor de una elipse o una placa, forzado por un flujo uniforme al infinito puede calcularse de la siguiente manera.

En el plano  $\zeta$ , sin el contorno circular tenemos el potencial de un flujo uniforme,  $\tilde{w}_0(\zeta) = U^*\zeta$ . El potencial en presencia del contorno circular de radio  $b$  centrado en el origen (con circulación en general no nula), se determina de acuerdo a (8.15) como

$$\tilde{w}(\zeta) = U^*\zeta + U\frac{b^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta. \quad (8.19)$$

El potencial correspondiente a la elipse o a la placa en el plano  $Z$ ,  $w(Z)$ , resulta entonces al reemplazar en (8.19) la transformación inversa de (8.18) (donde se toma en la solución doble de la ecuación cuadrática resultante, la correspondiente a  $\zeta \rightarrow Z$  para  $Z \rightarrow \infty$ )

$$\zeta = \frac{Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 - a^2}.$$

Finalmente, consideremos el caso importante del perfil alar frente a un flujo uniforme, que resulta de la misma transformación (8.18) cuando se transforma al plano  $Z$  el contorno del plano  $\zeta$  correspondiente a una circunferencia de radio  $b$  desplazada del origen en  $\zeta_0 = \delta \exp(i\beta)$  (con  $0 < \beta < \pi/2$ , y  $0 < \delta \ll a$ ), y tal que “toque” el punto  $\zeta = -a$ . Esto último se logra si

$$b^2 = (a + \delta \cos \beta)^2 + (\delta \sin \beta)^2.$$

En el plano  $\zeta$  el potencial es el dado por el flujo uniforme frente a un círculo desplazado, que se calcula de la manera usual (teniendo cuidado de aplicar el teorema del círculo en un sistema de coordenadas  $\zeta'$  desplazado, con origen en el centro del círculo, que luego se transforma al sistema original)

$$\tilde{w}(\zeta) = U^*(\zeta - \zeta_0) + U\frac{b^2}{(\zeta - \zeta_0)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_0). \quad (8.20)$$

El campo de velocidades en  $Z$  es, de (8.18) y (8.20),

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{dw}{dZ} = \frac{d\tilde{w}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} = \frac{d\tilde{w}}{d\zeta} \left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)^{-1} = \\ &= \left[ U^* - \frac{Ub^2}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i(\zeta - \zeta_0)} \right] \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Vemos entonces que la velocidad diverge en el punto  $Z$  transformado de  $\zeta = -a$  (el punto  $\zeta = a$  está dentro del círculo con la elección de  $b$  y  $\beta$  usada); tal punto corresponde a  $Z = -2a$ , el punto de fuga del ala. Para evitar esta divergencia no física, debe elegirse la circulación de manera que el corchete de (8.21) se anule en  $\zeta = -a$  (condición de Kutta, o hipótesis de Joukowski). Con algo de geometría elemental, esto se puede escribir

$$\Gamma = 2\pi bi [U^* \exp(i\chi/2) - U \exp(-i\chi/2)], \quad (8.22)$$

donde  $\chi$  es el ángulo que forma con el eje real  $x$  el borde de fuga del ala (que corresponde a un punto cuspidal).

## 8.1. Teorema de Blasius

La fuerza (por unidad de longitud perpendicular al plano) que sufre un objeto, cuyo contorno está descrito por una curva  $\mathcal{C}$ , inmerso en el flujo plano de un líquido ideal, está dada por

$$\mathbf{F} = \oint_{\mathcal{C}} -p \hat{\mathbf{n}} dl, \quad (8.23)$$

con  $\mathbf{n}$  la normal externa a la curva  $\mathcal{C}$ . Usando que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} dl &= d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{k}} = dy \hat{\mathbf{i}} - dx \hat{\mathbf{j}} \rightarrow -i dz, \\ \mathbf{F} &\rightarrow F, \end{aligned}$$

donde se ha asignado un número complejo a cada vector plano:  $A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} \rightarrow A_x + i A_y$ , se reescribe (8.23) como

$$F = i \oint_{\mathcal{C}} p dz. \quad (8.24)$$

Como para el fluido incompresible, homogéneo e irrotacional vale la siguiente integral de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi_M = C(t),$$

despejando de aquí la presión, y usando que

$$\oint_{\mathcal{C}} C(t) dz = 0,$$

escribimos la fuerza (8.24) como la suma de tres contribuciones

$$F = F_t + F_{Arq.} + F_B,$$

con

$$F_t = -i \rho \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz, \quad (8.25)$$

$$F_{Arq.} = -i \rho \oint_{\mathcal{C}} \varphi_M dz, \quad (8.26)$$

$$F_B = -i \rho \oint_{\mathcal{C}} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dz. \quad (8.27)$$

Veremos que los integrandos de (8.25) y del conjugado complejo de (8.27) pueden escribirse como funciones de sólo la variable compleja  $z$  cuando el sólido se encuentra en reposo, lo que permitirá evaluar las integrales usando técnicas de análisis complejo. Por otro lado (8.26) puede evaluarse sencillamente. Veamos primero esto último. Escribiendo el teorema de Stokes para un vector  $\mathbf{a}$  arbitrario en el plano  $(x, y)$

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{k}} dS, \quad (8.28)$$

al especializar en

$$\mathbf{a} = \varphi_M \mathbf{A},$$

con  $\mathbf{A}$  un vector constante cualquiera, reescribimos (8.28) como

$$\mathbf{A} \cdot \oint_{\mathcal{C}} \varphi_M d\mathbf{l} = \int (\nabla \varphi_M \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{k}} dS = \mathbf{A} \cdot \int (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla \varphi_M) dS,$$

que, como  $\mathbf{A}$  es arbitrario, se reduce a

$$\oint_{\mathcal{C}} \varphi_M d\mathbf{l} = \int (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla \varphi_M) dS.$$

Multiplicando vectorialmente a derecha cada miembro de esta igualdad por  $\hat{\mathbf{k}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \varphi_M d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{k}} &\rightarrow -i \oint_{\mathcal{C}} \varphi_M dz, \\ \int (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla \varphi_M) dS \times \hat{\mathbf{k}} &= \int \nabla \varphi_M dS \rightarrow - \int f_M dS. \end{aligned}$$

O sea,

$$i \oint_{\mathcal{C}} \varphi_M dz = \int f_M dS.$$

Con lo que  $F_{Arq.}$  se escribe

$$F_{Arq.} = -\rho \int f_M dS,$$

que no es otra cosa que la ley de Arquímedes.

Para calcular  $F_t$  la reescribimos como

$$F_t = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}} \phi dz = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}} (w - i\psi) dz = -i\rho \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}} w dz,$$

donde se usó para la última igualdad que, al estar el sólido quieto, su contorno es una línea de corriente y, por lo tanto,  $\psi$  es constante sobre él, lo que anula la integral cerrada de  $\psi$ .

Para  $F_B$  usamos que

$$|\mathbf{u}|^2 = u u^* = \left( \frac{dw}{dz} \right)^* \frac{dw}{dz},$$

con lo que, conjugando (8.27), escribimos

$$F_B^* = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} \left( \frac{dw}{dz} \right)^* dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} dw^*,$$

pero, nuevamente, al ser  $\mathcal{C}$  una línea de corriente,  $dw = d(\phi + i\psi) = d\phi$ , con lo que  $dw$  es real y puede entonces escribirse la expresión debida a Blasius

$$F_B^* = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} dw = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Usando el teorema de los residuos podemos finalmente escribir para  $F_t$  y  $F_B^*$

$$F_t = 2\pi\rho \frac{\partial}{\partial t} \sum_{z_i \in \mathcal{C}} \text{res}[w, z_i],$$

$$F_B^* = -\pi\rho \sum_{z_i \in \mathcal{C}} \text{res} \left[ \left( \frac{dw}{dz} \right)^2, z_i \right].$$

## 8.2. Teorema de Kutta-Joukowski

Supongamos que un flujo estacionario, uniforme al infinito con velocidad (compleja)  $U$ , incide sobre un objeto sólido quieto de contorno arbitrario  $\mathcal{C}$  (siempre manteniendo la simetría plana: el objeto es un cilindro muy largo

de base de forma arbitraria). En estas condiciones la fuerza total está dada por sólo el término de Blasius  $F_B$ , y como sabemos que fuera del cuerpo no hay singularidades en regiones finitas, el campo de velocidades conjugado (recuérdese que  $u^*$  es función de  $z$ ) puede desarrollarse en serie de Laurent en la variable  $z$  fuera de un disco que contenga al sólido. Así, tomando el origen de coordenadas en el interior del cuerpo, fuera de él podemos escribir

$$u^* = \frac{dw}{dz} = U^* + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots \quad (8.29)$$

La expresión de Blasius nos dice entonces muy fácilmente que  $F_B^* = -2\pi\rho a_1 U^*$ , o sea

$$F = -2\pi\rho a_1^* U. \quad (8.30)$$

Para ver qué es  $a_1$  calculamos la circulación:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \operatorname{Re} \oint_{\mathcal{C}} u^* dz = \operatorname{Re} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} dz = \operatorname{Re} \oint_{\mathcal{C}} dw.$$

La segunda igualdad es inmediata, la forma compleja de escribir la circulación; del término de la derecha, por otro lado, sabiendo que la parte imaginaria de  $w$  es constante sobre  $\mathcal{C}$  tenemos que  $dw$  es real sobre el contorno y que, por lo tanto, es innecesario tomar la parte real, por lo que podemos escribir simplemente

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} u^* dz = 2\pi i a_1,$$

donde la última igualdad es inmediata de (8.29). Así, podemos escribir (8.30) como

$$F = -i\rho\Gamma U.$$

Esta expresión es el teorema de Kutta-Joukowski, que nos dice que en las condiciones pedidas (flujo bidimensional, uniforme al infinito y estacionario sobre un objeto quieto) la fuerza depende de sólo la velocidad al infinito y la circulación alrededor del cuerpo. Nótese que no existe fuerza si no hay circulación (paradoja de D'Alembert), y que cuando existe, la fuerza es perpendicular a la velocidad  $U$  (en dirección girada en  $-\pi/2$  si  $\Gamma$  es positiva); esta fuerza es la responsable del "efecto" que hace que objetos rotantes se aparten de trayectorias rectilíneas cuando se mueven en un fluido.

Como ejemplo consideremos el caso del ala visto más arriba. Por el teorema de Blasius podemos escribir para la fuerza sobre el ala (por unidad de longitud de la misma)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* &= \frac{i\rho}{2} \oint \left( \frac{dw}{dZ} \right)^2 dZ = \frac{i\rho}{2} \oint \left( \frac{d\tilde{w}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} \right)^2 dZ = \\ &= \frac{i\rho}{2} \oint \left( \frac{d\tilde{w}}{d\zeta} \right)^2 \left( \frac{dZ}{d\zeta} \right)^{-1} d\zeta = i\rho U^* \Gamma, \end{aligned} \quad (8.31)$$

donde la expresión final de la última línea se obtiene fácilmente con (8.18) y (8.20) (alternativamente, puede usarse la tesis del teorema de Kutta-Joukowski). La fuerza tiene claramente dirección perpendicular a la del vector velocidad (fuerza ascensional) y su magnitud es, de (8.22), para  $U = -|U| \exp(-i\alpha)$  (la velocidad forma un ángulo  $0 < \alpha < \pi/2$  con el semieje real negativo; esto es, “enfrenta” el ala. En el sistema en que el fluido lejano está quieto y el ala se desplaza con velocidad de módulo  $|U|$ , ésta última forma un ángulo  $-\alpha$  con el eje  $x$ ),

$$|\mathcal{F}| = 4\pi\rho|U|^2b \sin(\alpha + \chi/2).$$

Como la envergadura del ala  $L$  es aproximadamente igual a  $4a \simeq 4b$ , podemos escribir en función de valores propios del ala

$$|\mathcal{F}| = \pi\rho|U|^2L \sin(\alpha + \chi/2).$$

# Capítulo 9

## Teorema II

El teorema II se deduce de la condición que la relación entre magnitudes físicas, debe ser invariante ante cambios de escala de dichas magnitudes. Esto es, si escribimos que una magnitud arbitraria  $a$  es determinada (a través de leyes físicas) por el valor de otras  $n$  magnitudes  $a_i$

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (9.1)$$

esta relación debe ser covariante frente al rescalado de las unidades fundamentales que determinan las dimensiones de las magnitudes involucradas. Así, si se necesitan  $k$  magnitudes fundamentales  $c_j$  para determinar las unidades de todas las variables en cuestión ( $a$  y las  $a_i$ ), cuando se reescalan las  $c_j$  (por ejemplo se pasa de medirlas en sistema CGS a usar MKS), cada una de ellas cambiará en un factor  $\alpha_j$

$$c'_j = \alpha_j c_j,$$

con lo que los valores de las distintas variables cambiarán de la forma general

$$\begin{aligned} a' &= \alpha_1^{\beta_{10}} \alpha_2^{\beta_{20}} \dots \alpha_k^{\beta_{k0}} a, \\ a'_i &= \alpha_1^{\beta_{1i}} \alpha_2^{\beta_{2i}} \dots \alpha_k^{\beta_{ki}} a_i. \end{aligned}$$

La condición de covarianza de (9.1) es entonces

$$a' = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_n), \quad (9.2)$$

con la misma forma funcional de  $f$ . Aprovechando esto, podemos elegir de entre las  $n$  magnitudes  $a_i$  a  $k$  de ellas que sirvan como unidades fundamentales (a partir de sus unidades puede determinarse las unidades del resto). Consideremos, sin pérdida de generalidad, que éstas son las  $k$  primeras  $a_i$ , con lo que la condición (9.2) se escribe explícitamente

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\beta_{10}} \alpha_2^{\beta_{20}} \dots \alpha_k^{\beta_{k0}} a &= f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_k a_k, \\ &\quad \alpha_1^{\beta_{1k+1}} \alpha_2^{\beta_{2k+1}} \dots \alpha_k^{\beta_{kk+1}} a_{k+1}, \dots, \alpha_1^{\beta_{1n}} \alpha_2^{\beta_{2n}} \dots \alpha_k^{\beta_{kn}} a_n). \end{aligned}$$

La idea es ahora elegir los factores de escala  $\alpha_j$  para que las unidades fundamentales valgan uno, esto es,  $\alpha_j = a_j^{-1}$ , con lo que se obtiene

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) = F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (9.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{a}{a_1^{\beta_{10}} a_2^{\beta_{20}} \dots a_k^{\beta_{k0}}}, \\ \Pi_i &= \frac{a_{i-k}}{a_1^{\beta_{1i}} a_2^{\beta_{2i}} \dots a_k^{\beta_{ki}}}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que estos  $\Pi$ 's son adimensionales, por el hecho que las  $\{a_1, \dots, a_k\}$  determinan las magnitudes de todas las demás. También puede verse por el absurdo; si tuvieran dimensiones, al cambiar el sistema de unidades cambiaría su valor, y podría repetirse todo el razonamiento hecho hasta aquí, ahora con (9.3) en lugar de (9.1), con lo que se continuaría disminuyendo el número de variables independientes; el proceso sólo podría terminar cuando las  $\Pi$ 's fuesen invariantes ante cambios de escala, esto es, adimensionales.

El teorema dice entonces que se requieren sólo  $n - k$  variables adimensionales  $\Pi_i$  para determinar el valor de la variable (adimensional) derivada  $\Pi$ , en lugar de las  $n$  requeridas para relacionar las magnitudes con dimensiones.

La importancia práctica del teorema es enorme, sobre todo cuando  $k$  es cercano a  $n$ .

# Capítulo 10

## Capa límite

Considérese el flujo de un fluido poco viscoso alrededor de un cuerpo sólido. Poco viscoso en el sentido que las fuerzas viscosas son importantes sólo muy cerca del cuerpo, a una distancia de orden  $\delta$ , pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo, de orden  $L$ . Esta región es la que denominamos capa límite. Además, si el radio de curvatura local de la superficie del cuerpo es grande comparado con  $\delta$  (la forma del cuerpo varía suavemente en distancias del orden de  $\delta$ ), el flujo en la capa límite puede considerarse plano. Llamando  $x$  a la coordenada a lo largo de la superficie del cuerpo en la dirección de la velocidad local tangente, e  $y$  a la coordenada perpendicular a la superficie, podemos escribir las dos componentes de la ecuación de Navier-Stokes (se desprecian las fuerzas de volumen en la capa límite; pensar porqué)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (10.2)$$

mientras que la ecuación de continuidad para velocidades pequeñas respecto de la del sonido (fluido incompresible) es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (10.3)$$

$u$  es la componente  $x$  de la velocidad, y  $v$  la componente  $y$ .

Estimemos ahora las magnitudes de las distintas variables. Para un sólido quieto, alrededor del cual el fluido fluye con velocidad de magnitud  $U$  lejos de aquél, la velocidad  $u$  pasa de ser cero sobre el cuerpo ( $y = 0$ ) a ser del orden de  $U$  en  $y \approx \delta$ , o sea,

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U}{\delta}.$$

Por otro lado, la velocidad alrededor del cuerpo varía apreciablemente en distancias del orden del cuerpo mismo; como la magnitud de  $u$  varía entre 0 y la magnitud de  $U$ ,  $u$  misma varía con  $x$  en distancias del orden de  $L$ ; esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L}.$$

Con esta última, la ecuación de continuidad (10.3) nos dice entonces que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L},$$

con lo que obtenemos una estimación de la magnitud de  $v$  ( $v$  por supuesto es también cero en  $y = 0$ ) de

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{V}{\delta} \sim \frac{U}{L},$$

o sea,

$$V \sim U \frac{\delta}{L}.$$

Con estas estimaciones, escalemos las variables para obtener magnitudes que varíen entre cero y valores cercanos a uno:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{V} = \frac{v}{U} \frac{L}{\delta}, \\ x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{\delta}. \end{aligned}$$

En estas variables las ecuaciones (10.1)-(10.2) se reescriben

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (10.5)$$

donde se introdujeron además las magnitudes adimensionales

$$t^* = \frac{U t}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2},$$

y el número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}.$$

Como las velocidades adimensionales varían entre cero y, aproximadamente, uno cuando las coordenadas adimensionales varían también entre cero

y uno (aproximadamente), la importancia de los distintos términos de (10.4) y (10.5) está dada por los coeficientes que los multiplican. Para compararlos entre sí falta todavía estimar el valor de  $\delta$ . Esto puede hacerse fácilmente de (10.4) teniendo en cuenta que las fuerzas viscosas son importantes dentro de la capa límite, lo que significa que éstas determinan la aceleración del fluido en ella y, por lo tanto, debe ser

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \sim \frac{1}{\text{Re}} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}},$$

lo que significa que

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{L^2}{\delta^2} \sim 1,$$

y

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (10.6)$$

Con esto, tomando  $\delta = L/\sqrt{\text{Re}}$ , en el límite de  $\text{Re} \rightarrow \infty$  las (10.4) y (10.5) se reducen a

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0, \quad (10.8)$$

que junto con la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (10.9)$$

son las ecuaciones de Prandtl de la capa límite (Prandtl, 1904). Aunque muy similares a las ecuaciones originales, tienen una simplificación notable, que es la dada por (10.8), que indica que la presión es independiente de la coordenada perpendicular; esto implica que la presión dentro de la capa límite es igual a la determinada por el flujo externo. Operativamente, con la suposición de capa límite delgada ( $\delta \ll L$ ), válida por (10.6) a números de Reynolds grandes, puede resolverse el flujo externo como el de un fluido ideal alrededor del mismo cuerpo (aumentado en principio por el espesor de la capa límite, aunque en la práctica no es necesario considerar esto). Resuelto este flujo se obtiene la distribución de presión sobre la superficie del cuerpo, que es la que se utiliza en (10.7) para resolver ésta junto con (10.9).

El espesor  $\delta$  utilizado para adimensionlizar las ecuaciones,  $\delta = L/\sqrt{\text{Re}}$ , es sólo una estimación de lo que puede considerarse el ancho de la capa

límite. Una definición más correcta del ancho, determinable una vez resuelto el problema, es, por ejemplo, el valor  $\delta_0$  de la coordenada  $y$  en el que la velocidad tangente alcanza un valor de, digamos, el 99 % de la velocidad de la solución externa:  $u(x, \delta_0(x)) = 0,99 U(x, 0)$ . En la práctica, es mucho más útil el llamado espesor de desplazamiento de la capa límite  $\delta_1(x)$ , que indica cuánto se desplazan las líneas de corriente de la solución externa, por efecto del frenamiento en la capa límite, respecto de las de una solución puramente ideal, sin capa límite. Para calcular  $\delta_1$  consideremos el flujo a una distancia  $H$  de la superficie, con  $H \gg \delta$ , pero suficientemente pequeña para que la velocidad externa pueda considerarse constante entre  $y = 0$  e  $y = H$ . De esta manera, el caudal de la solución puramente ideal a través de una sección de altura  $H$  (y longitud unidad perpendicular al flujo) sería  $U(x, 0)H$ ; debido a que las velocidades dentro de la capa límite son menores que  $U$ , este caudal en la solución real es obtenible sobre una sección de altura mayor:  $H + \delta_1$ ,

$$U(x, 0)H = \int_0^{H+\delta_1} u(x, y)dy. \quad (10.10)$$

Usando que, como  $H \gg \delta$ , es  $u(x, H) \simeq U(x, 0)$ , podemos escribir

$$\int_0^{H+\delta_1} u(x, y)dy = \int_0^H u(x, y)dy + \int_H^{H+\delta_1} u(x, y)dy \simeq \int_0^H u(x, y)dy + U(x, 0)\delta_1(x);$$

con esto, escribiendo  $H = \int_0^H dy$  tenemos de (10.10)

$$U(x, 0)\delta_1(x) = \int_0^H [U(x, 0) - u(x, y)] dy \simeq \int_0^\infty [U(x, 0) - u(x, y)] dy,$$

donde en la última se usó que  $U(x, 0) - u(x, y) \simeq 0$  en  $y \gtrsim H$ . Obtenemos entonces

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{u(x, y)}{U(x, 0)} \right] dy.$$

Consideremos ahora la cuestión de la estabilidad de la capa límite. Para esto tomemos un caso estacionario y evaluemos (10.7) sobre la superficie del sólido,  $y^* = 0$ , en la que vale, por condición de contorno de fluido viscoso,  $u^* = v^* = 0$ , con lo que se obtiene

$$\left. \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right|_{y^*=0} = \frac{\partial p^*}{\partial x^*}.$$

Vemos de esta ecuación que en cada  $x^*$  en el que vale  $\partial p^*/\partial x^* < 0$  el perfil  $u^*(y^*)$  en  $y^* = 0$  es convexo en la dirección de  $x^*$  creciente, con lo que si la

velocidad externa  $U$  es también en el sentido de  $x^*$  creciente,  $u^*(y^*)$  puede crecer monótonamente desde cero en el sólido hasta (aproximadamente) uno fuera de la capa límite. En cambio, si  $\partial p^*/\partial x^* > 0$  y suficientemente grande, la velocidad  $u^*$  puede hacerse negativa cerca del sólido; esto es, en la base de la capa límite aparece una circulación contraria al flujo externo. Esta última situación es muy inestable y conduce a la separación de esta capa. Nótese que esto ocurre cuando  $p^*$  crece “aguas abajo”; esto es, en el sentido de la velocidad externa  $U$ ; se dice entonces que el gradiente de presión es adverso. En la práctica, la separación ocurre muy cerca del punto en el que  $\partial p^*/\partial x^*$  cambia de signo, por lo que la condición  $\partial p^*/\partial x^* = 0$  nos da un buen criterio para estimar el punto de separación. Sólo hasta este punto es aplicable la teoría de capa límite desarrollada.

# Capítulo 11

## Ondas e inestabilidades

### 11.1. Tensión superficial

En la interfase entre dos fluidos distintos, aún en ausencia de efectos de viscosidad (por ejemplo si los fluidos se encuentran en reposo), sucede en general que la presión es discontinua. Considérese el caso de una gota de agua quieta en una atmósfera de presión uniforme (gota de agua en el interior del transbordador espacial en órbita inercial). es sabido que tal gota toma una forma esférica debido a la tensión superficial (o más propiamente interfacial). La diferencia entre la presión interna y la externa está dada por la ley de Laplace

$$p_{int} - p_{ext} = \frac{2\gamma}{R},$$

donde  $R$  es el radio de la gota y  $\gamma$  el coeficiente de tensión superficial. Si debido a movimientos del fluido interno y/o del externo la superficie adquiere una forma arbitraria, la ley de Laplace expresa más generalmente que la diferencia de presión a ambos lados de esa superficie en un punto cualquiera de la misma está dada por

$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (11.1)$$

con  $R_1$  y  $R_2$  los radios de curvatura de la superficie en el punto en cuestión; el radio de curvatura es positivo para superficies convexas y negativo para superficies cóncavas. Es un ejercicio sencillo demostrar que la expresión (11.1) puede escribirse en la forma útil

$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (11.2)$$

con  $\mathbf{n}$  la normal externa a la superficie. En particular, si la superficie está dada por  $z = \zeta(x, y)$ , entonces la normal en componentes cartesianas es

$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}}. \quad (11.3)$$

La tensión superficial no modifica las ecuaciones de movimiento del fluido; pero sí determina su solución a través de (11.2) que interviene en las condiciones de contorno. Téngase en cuenta que, con más generalidad, debe decirse que  $\gamma \nabla \cdot \mathbf{n}$  determina la diferencia de esfuerzos normales a la superficie, esto es,

$$T_{nn}^{(ext)} - T_{nn}^{(int)} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n},$$

con  $T_{nn} = -p + \sigma_{ij} n_i n_j$ .

## 11.2. Oscilaciones e inestabilidades de interfaces

Estudiaremos la evolución de la interfase entre dos fluidos incompresibles e ideales. En particular, se considerarán sólo apartamientos pequeños respecto de un estado base en el que la interfase es plana horizontal en presencia de gravedad. Por ser los fluidos ideales, pueden en principio tener diferentes velocidades paralelas a la interfase (un fluido puede “deslizar” sobre el otro, caso de discontinuidad tangencial). Tomaremos entonces la coordenada  $z$  vertical, y la interfase imperturbada coincidente con el plano  $z = 0$ . El fluido en  $z > 0$  tiene densidad uniforme  $\rho_1$  y velocidad  $U_1$  en la dirección  $x$ . El fluido en  $z < 0$  densidad  $\rho_2$  y velocidad  $U_2$  también en la dirección  $x$ . La presión de este estado base es uniforme en cada plano horizontal, y varía verticalmente con su forma hidrostática:  $p = p_0 - \rho_1 g z$  en  $z > 0$ , y  $p = p_0 - \rho_2 g z$  en  $z < 0$ .

Este estado base es ligeramente perturbado y luego dejado evolucionar libremente, de manera que la interfase adoptará una altura respecto de  $z = 0$  dada por  $\zeta(x, y, t)$ . Correspondientemente, todas las variables del flujo sufrirán pequeñas variaciones respecto de sus estados base. La ecuación que describe la velocidad a cada lado de la interfase es, por supuesto, la ecuación para fluido incompresible ideal

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \nabla (g z), \quad (11.4)$$

donde se sobreentiende que esta ecuación debe aplicarse a cada lado de la interfase con el valor apropiado de  $\rho$ .

Si consideramos que en cada lado de la interfase la velocidad base uniforme y constante fue perturbada en un valor  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{u} = U\hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{w}$$

podemos reescribir (11.4) como

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \nabla (gz).$$

Como la perturbación de la velocidad es pequeña, podemos despreciar el término cuadrático y reescribir esta ecuación como

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - \nabla (gz). \quad (11.5)$$

Tomando el rotor se obtiene inmediatamente para la vorticidad de la velocidad perturbada  $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{w}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial t} + U \frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial x} = 0,$$

que expresa que la vorticidad inicial de cualquier perturbación pequeña es simplemente convectada con la velocidad imperturbada del flujo, sin crecer ni disminuir. De esta manera, las perturbaciones que evolucionan dando lugar a oscilaciones estables o inestabilidades son irrotacionales (si una perturbación inicial contiene una parte rotacional, ésta permanece congelada en el fluido sin evolucionar y se desacopla de su parte irrotacional). Consideraremos por lo tanto que  $\mathbf{w}$  es irrotacional por lo que podemos escribir  $\mathbf{w} = \nabla \varphi$  en (11.5), e integrando una vez obtener la integral de Bernoulli correspondiente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t).$$

La  $C(t)$  puede absorberse en el potencial redefiniendo  $\varphi \rightarrow \varphi + \int C(t) dt$  con lo que se tiene finalmente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (11.6)$$

Esta ecuación, como es sabido, determina la distribución de presiones una vez que la ecuación para  $\varphi$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (11.7)$$

es resuelta con las condiciones apropiadas de contorno. Es en estas últimas donde intervienen la forma y el movimiento de la interfase. Téngase en cuenta

que (11.6) y (11.7) son válidas a cada lado de la interfase con correspondientes  $U_1$ ,  $\rho_1$  y  $\varphi_1$  en  $z > \varsigma(x, y, t)$ , y  $U_2$ ,  $\rho_2$  y  $\varphi_2$  en  $z < \varsigma(x, y, t)$ . En  $z = \varsigma(x, y, t)$  existe en general una discontinuidad de la velocidad tangencial (rotor infinito), que invalida la suposición de irrotacionalidad. Esta “capa” de vorticidad es la responsable del salto del potencial de velocidades a través de ella.

La condición de contorno de tipo cinemático en la interfase  $z = \varsigma(x, y, t)$  es que el desplazamiento vertical, en un  $\Delta t$ , de un elemento de fluido en contacto con la interfase debe ser igual al desplazamiento vertical de dicha interfase siguiendo al elemento; lo que se expresa por, en el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$u_z(x, y, z = \varsigma) = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + u_x(x, y, z = \varsigma) \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + u_y(x, y, z = \varsigma) \frac{\partial \varsigma}{\partial y}.$$

Para un elemento de fluido inmediatamente encima de la interfase esto se escribe

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=\varsigma} = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \left( U_1 + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{z=\varsigma} \right) \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right]_{z=\varsigma} \frac{\partial \varsigma}{\partial y}, \quad (11.8)$$

y para un elemento de la parte inferior de la interfase

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right]_{z=\varsigma} = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \left( U_2 + \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{z=\varsigma} \right) \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right]_{z=\varsigma} \frac{\partial \varsigma}{\partial y}. \quad (11.9)$$

La condición dinámica expresa que los esfuerzos normales están relacionados por la condición (11.2), que se escribe usando (11.6) a cada lado de la superficie

$$-\rho_2 \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + g z \right]_{z=\varsigma} = -\rho_1 \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g z \right]_{z=\varsigma} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (11.10)$$

donde  $\mathbf{n}$  está dado por (11.3) y corresponde a la normal que “penetra” en el fluido de arriba.

Todas estas condiciones son difíciles de usar debido a que deben evaluarse sobre la superficie perturbada. Sin embargo, usando la pequeñez del apartamiento  $\varsigma$ , podemos aproximar las funciones en el entorno de  $z = 0$ . Así, por ejemplo,

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, 0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]_{z=0} z^2 + \dots,$$

de manera que

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=\varsigma} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0} + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right]_{z=0} \varsigma + \dots$$

Por otro lado, la expresión de  $\mathbf{n}$  puede escribirse a orden uno en  $\varsigma$  como

$$\mathbf{n} = \left( -\frac{\partial \varsigma}{\partial x}, -\frac{\partial \varsigma}{\partial y}, 1 \right). \quad (11.11)$$

De esta manera, a orden uno en las perturbaciones  $\varsigma$  y  $\varphi$ , podemos reescribir las condiciones de contorno (11.8)-(11.10) como

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial x}, \quad (11.12)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varsigma}{\partial x}, \quad (11.13)$$

$$\rho_2 \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{z=0} + \rho_2 g \varsigma = \rho_1 \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{z=0} + \rho_1 g \varsigma + \gamma \left( \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial y^2} \right). \quad (11.14)$$

A estas condiciones sobre la interfase deben agregarse las condiciones que hagan falta en otros contornos para determinar la solución de las ecuaciones de Laplace para cada uno de los potenciales

$$\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = 0. \quad (11.15)$$

### 11.2.1. Recinto ilimitado

Consideraremos ahora los posibles tipos de ondas e inestabilidades que tienen lugar cuando no existen contornos cercanos a la interfase. Para esto aprovecharemos que las ecuaciones (11.15) son lineales y que, gracias a la suposición de apartamientos pequeños, también las condiciones de contorno son lineales en las variables involucradas. Esto permite estudiar por separado cada uno de los modos de Fourier en que se pueden descomponer las variables. Aprovechando además que no hay dependencia explícita (en coeficientes, valores donde deben ser evaluadas, etc.) de las ecuaciones y de las condiciones de contorno en las variables  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , escribimos para cada variable (entendiendo que debe tomarse la parte real)

$$\varphi_{1,2}(x, y, z, t) = \widehat{\varphi}_{1,2}(z) \exp [i (k_x x + k_y y - \omega t)], \quad (11.16)$$

$$\varsigma(x, y, t) = \varsigma_0 \exp [i (k_x x + k_y y - \omega t)], \quad (11.17)$$

con la idea de que una perturbación arbitraria puede descomponerse en una suma de estos modos particulares.

Al reemplazar (11.16) en (11.15) resulta

$$\frac{d^2 \widehat{\varphi}_{1,2}}{dz^2} - k^2 \widehat{\varphi}_{1,2} = 0,$$

con  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ , que se integra trivialmente lo que, al imponer que  $\widehat{\varphi}_1$  no debe diverger cuando  $z \rightarrow \infty$ , y que  $\widehat{\varphi}_2$  no debe diverger cuando  $z \rightarrow -\infty$ , da (con constantes  $A_{1,2}$ )

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_1(z) &= A_1 \exp[-kz], \\ \widehat{\varphi}_2(z) &= A_2 \exp[kz].\end{aligned}$$

Con estas expresiones, reemplazando (11.16) y (11.17) en las condiciones (11.12)-(11.13), obtenemos fácilmente

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{i}{k}(\omega - k_x U_1)\varsigma_0, \\ A_2 &= -\frac{i}{k}(\omega - k_x U_2)\varsigma_0,\end{aligned}$$

que al reemplazarse en (11.14) junto a (11.16) y (11.17), y pedir que  $\varsigma_0 \neq 0$  dan la relación

$$\varrho_1(\omega - k_x U_1)^2 + \varrho_2(\omega - k_x U_2)^2 = (\varrho_2 - \varrho_1)gk + \gamma k^3. \quad (11.18)$$

Esta es la llamada relación de dispersión, que determina cómo está relacionada la frecuencia (angular)  $\omega$  con el vector de onda  $\mathbf{k}$  para cada uno de los modos de Fourier. Nos dice con qué frecuencia oscilará un modo que fue inicialmente generado con una longitud de onda dada. En estas condiciones el vector de onda es real, pero  $\omega$  puede ser compleja en general.

Si explicitamos las componentes real e imaginaria de  $\omega$

$$\omega = \omega_R + i\sigma,$$

vemos que, por ejemplo,  $\varsigma$  se escribe de (11.17) como

$$\varsigma(x, y, t) = \text{Re} \{ \varsigma_0 \exp [i(k_x x + k_y y - \omega_R t)] \} \exp[\sigma t],$$

esto es, un factor oscilante con frecuencia  $\omega_R$ , modulado por una exponencial creciente si  $\sigma > 0$ , o decreciente si  $\sigma < 0$ . Así, si la relación (11.18) nos dice que si para un dado  $\mathbf{k}$  la frecuencia correspondiente tiene parte imaginaria negativa, este modo componente de la perturbación decaerá con el tiempo. Por otro lado, si el  $\sigma$  correspondiente es positivo, el modo en cuestión crecerá con el tiempo, indicando que el estado base estudiado no puede mantener

pequeñas las perturbaciones de la longitud de onda considerada, por lo que se dice que el estado es inestable frente a este tipo de perturbaciones.

Por otro lado, si  $\omega$  es real para un dado  $\mathbf{k}$ , la perturbación de esta longitud de onda permanece oscilando indefinidamente, propagándose con la velocidad de fase  $\omega/k$ . Como es sabido, si la velocidad de fase es independiente de  $k$ , una perturbación localizada, formada por la superposición de modos de distinta longitud de onda, se propaga sin deformarse, por lo que el sistema que admite estas ondas se dice no dispersivo. Veremos enseguida que este no es el caso para el sistema considerado, que resulta ser fuertemente dispersivo.

### 11.2.2. Ondas de gravedad-inestabilidad de Rayleigh-Taylor

Antes de analizar la relación de dispersión general (11.18), consideraremos el caso particular importante en el que las velocidades del estado base son nulas  $U_1 = U_2 = 0$ . En este caso (11.18) se reduce a

$$\omega^2 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)g k + \gamma k^3}{\varrho_2 + \varrho_1}. \quad (11.19)$$

Vemos enseguida que existe un valor crítico de  $k$  que separa los modos en los que domina la tensión superficial de los modos en los que domina la gravedad; este valor es

$$k_c = \sqrt{\frac{|\varrho_2 - \varrho_1|g}{\gamma}}.$$

Para una interfase agua-aire es  $\gamma \simeq 74$  dyn/cm,  $\rho_1 \simeq 1,23 \cdot 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>,  $\rho_2 \simeq 1,02$  g/cm<sup>3</sup>, lo que da una longitud de onda crítica  $2\pi/k_c \simeq 1,7$  cm. Para longitudes de onda mucho más pequeñas que  $2\pi/k_c$ , el término dominante es el de tensión superficial, con lo que la relación de dispersión es

$$\omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\varrho_2 + \varrho_1},$$

que sólo tiene soluciones reales por lo que las perturbaciones de este tipo dan lugar a ondas propagantes de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\varrho_2 + \varrho_1}},$$

y la velocidad de fase es  $\omega/k \sim \sqrt{k}$ . Estos modos dispersivos en el que la fuerza restitutiva es la tensión superficial se denominan capilares.

En el caso opuesto de longitudes de onda grandes  $\lambda \gg 2\pi/k_c$ , (11.19) se reduce a la relación de dispersión de ondas de gravedad (la fuerza restitutiva es debida a la gravedad)

$$\omega^2 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_2 + \varrho_1} g k. \quad (11.20)$$

A diferencia del caso de ondas capilares, esta relación da valores reales de la frecuencia sólo si  $\varrho_2 > \varrho_1$ , esto es, si el líquido más denso se encuentra por debajo del más liviano. Si  $\varrho_2 < \varrho_1$  se tiene un sistema inestable (ante perturbaciones con  $\lambda > 2\pi/k_c$ ) en el que no existen modos propagantes ( $\omega$  es imaginaria pura); la perturbación crece sin oscilar. Como

$$\omega = \pm i \sqrt{\frac{|\varrho_2 - \varrho_1|}{\varrho_2 + \varrho_1} g k},$$

existe siempre un modo decreciente acompañando al creciente. La inestabilidad mencionada es la llamada de Rayleigh-Taylor. Fue Rayleigh quien dedujo originalmente (11.20), y Taylor quien concluyó que el efecto desestabilizante es la aceleración de la interfase entre un fluido pesado y uno liviano en la dirección del pesado (puede verse esta inestabilidad acelerando rápidamente hacia abajo una botella medio llena de agua; el fluido liviano es en este caso el aire; la aceleración hacia arriba es estable).

Aun cuando  $\varrho_2 < \varrho_1$  es inmediato de (11.19) que no hay modos inestables con  $\lambda < 2\pi/k_c$ , por lo que es posible armar en la práctica un sistema inestable como el del truco clásico del vaso de agua invertido, siempre que se evite excitar ondas de longitud mayor que  $2\pi/k_c$ .

Si  $\varrho_2 > \varrho_1$  las soluciones de (11.20) son reales y se tienen modos propagantes. En el caso usual de ser  $\varrho_2 \gg \varrho_1$ , se tiene la relación de dispersión de ondas largas en la superficie de líquidos profundos

$$\omega = \sqrt{g k},$$

que son claramente dispersivas.

### 11.2.3. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Otra configuración en la que (11.18) se simplifica considerablemente es aquella en la que el fluido por encima y debajo de la interfase es el mismo. En tal caso no se tiene una interfase propiamente dicha sino una hoja de vorticidad (la vorticidad del estado base es infinita en el plano  $z = 0$  y vale cero fuera de él). Siendo el fluido el mismo a ambos lados no hay efecto de

tensión superficial (el  $\gamma$  correspondiente es cero) y, por supuesto,  $\varrho_2 = \varrho_1$ , con lo que (11.18) se reduce a

$$(\omega - k_x U_1)^2 + (\omega - k_x U_2)^2 = 0,$$

que, claramente, no tiene soluciones reales puras para  $\omega$ . Lo que nos dice que una capa plana de vorticidad en el seno de un líquido ideal es siempre inestable. Esta inestabilidad es denominada inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Si se trata de una verdadera interfase entre dos fluidos distintos, cuando el más liviano se encuentra por encima del más denso los efectos de gravedad son estabilizantes, así como los de la tensión superficial, para ondas de longitud de onda corta. Para ver esto debe resolverse (11.18) para  $\omega$ , que es un ejercicio simple y da

$$\omega = \frac{k_x(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[ \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)g k + \gamma k^3}{\varrho_2 + \varrho_1} - \frac{k_x^2 \varrho_2 \varrho_1 (U_2 - U_1)^2}{(\varrho_2 + \varrho_1)^2} \right]^{1/2}$$

Se tienen soluciones imaginarias inestables si

$$\frac{k_x^2 \varrho_2 \varrho_1 (U_2 - U_1)^2}{\varrho_2 + \varrho_1} > (\varrho_2 - \varrho_1)g k + \gamma k^3,$$

que, considerando por simplicidad que  $k_y = 0$  ( $k_x = k$ ), lleva a la región de números de onda inestables  $k_{\text{inf}} < k < k_{\text{sup}}$ , donde

$$k_{\text{sup,inf}} = \frac{\varrho_2 \varrho_1 (U_2 - U_1)^2}{2\gamma} \pm \left\{ \left[ \frac{\varrho_2 \varrho_1 (U_2 - U_1)^2}{2\gamma} \right]^2 - \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)g}{\gamma} \right\}^{1/2}.$$

La diferencia de velocidad mínima que produce inestabilidad es entonces la que cumple

$$\left[ \frac{\varrho_2 \varrho_1 (U_2 - U_1)_{\text{mín}}^2}{2\gamma} \right]^2 = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)g}{\gamma}.$$

Para el caso de una interfase agua-aire es  $\gamma \simeq 74$  dyn/cm,  $\rho_1 \simeq 1,23 \cdot 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>,  $\rho_2 \simeq 1,02$  g/cm<sup>3</sup>, con lo que se tiene  $\Delta U_{\text{mín}} \simeq 650$  cm/s  $\simeq 23$  km/h. Un viento con velocidad mayor que este valor sobre agua quieta produce entonces olas apreciables.

### 11.3. Ondas en medios dispersivos

Consideramos que se conoce la relación de dispersión  $\omega(\mathbf{k})$ , y la única restricción que imponemos a ésta es que corresponda a la de un medio homogéneo; esto es, la relación de dispersión es independiente de la posición;

sin embargo, puede corresponder a un medio anisótropo, en el que haya direcciones privilegiadas ( $\omega$  depende del vector  $\mathbf{k}$  y no sólo de su módulo; esto es necesario si queremos considerar, por ejemplo, ondas en la interfase entre dos medios que se mueven con velocidades distintas).

Escribimos la forma general de la perturbación en términos de la integral de Fourier sobre los vectores de onda  $\mathbf{k}$  (de dimensión  $n$ ;  $n = 2$  para el caso de ondas de superficie)

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int F(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)] d^n k. \quad (11.21)$$

Debe tenerse en cuenta que si  $\omega(\mathbf{k})$  presenta varias ramas; esto es, para un mismo valor de  $\mathbf{k}$  existen varios valores de  $\omega$  que satisfacen la relación de dispersión, entonces  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  está dado por la suma de integrales como la de (11.21), una por cada rama de  $\omega(\mathbf{k})$ ; digamos que existen  $P$  de ellas,

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^P \int F_p(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_p(\mathbf{k})t)] d^n k. \quad (11.22)$$

La complicación práctica que esto trae es que se requiere conocer  $P$  condiciones iniciales para determinar las  $F_p(\mathbf{k})$ ; por ejemplo, el valor de  $\zeta(\mathbf{x}, t = 0)$  y de sus primeras  $(P - 1)$  derivadas temporales en  $t = 0$ . Para no recargar las expresiones que se deriven usaremos la expresión (11.21) de ahora en más.

Un valor dado  $\theta_0$  de la fase de un particular modo de Fourier, definido por su vector de onda  $\mathbf{k}$  y su frecuencia angular asociada  $\omega(\mathbf{k})$ , corresponde a una dada particularidad de la onda elemental; en el caso unidimensional podría ser, por ejemplo, una cresta; en más dimensiones podemos hablar de un "frente" de onda. La posición de este frente al transcurrir el tiempo está dada por  $\theta_0 = cte + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t$ , por lo que en la dirección determinada por  $\mathbf{k}$  el frente avanza con velocidad ( $k \equiv |\mathbf{k}|$  es el número de onda)

$$v_F = \frac{\omega(\mathbf{k})}{k}, \quad (11.23)$$

denominada velocidad de fase. Sólo si  $\omega(\mathbf{k})$  es lineal en  $\mathbf{k}$  (y sin término constante) la velocidad de fase es la misma para todas las longitudes de onda  $2\pi/k$  (puede ciertamente depender de la dirección del vector  $\mathbf{k}$ ) y se dice entonces que el medio es no dispersivo.

Las perturbaciones reales que ocurren en sistemas físicos tienen extensión espacial y temporal finita, y los modos puros de Fourier (que existen en todo el espacio y en todo tiempo) son más bien una herramienta matemática útil, que requiere ser interpretada adecuadamente. En este sentido sabemos que la

velocidad de fase no es la más apropiada para describir la evolución de perturbaciones físicas, sino que la velocidad de grupo es la que más nos dice sobre estas últimas. De hecho, la velocidad de grupo tiene ciertas características fundamentales:

i) Es la velocidad con la que se mueve *la envolvente* de un paquete de ondas aislado.

ii) Es la velocidad a la que debe moverse un observador para ver siempre el mismo vector de onda  $\mathbf{k}$  en trenes de ondas extensos generados por perturbaciones localizadas.

iii) Es la velocidad a la que se transporta la energía de las ondas de un dado número de onda  $k$ .

El punto i) es tal vez el más usado para introducir la velocidad de grupo. Se considera un paquete localizado formado por modos de Fourier en un pequeño intervalo alrededor del vector de onda  $\mathbf{k}^*$  dado por la expresión (11.21) en la que  $F(\mathbf{k})$  tiende a cero rápidamente si  $\mathbf{k}$  está fuera del intervalo considerado. Así, la fase en la exponencial puede aproximarse por

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t \simeq \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}^*)t + \left( x_j - \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \Big|_{\mathbf{k}^*} t \right) (k_j - k_j^*),$$

teniendo en cuenta que valores de  $\mathbf{k}$  que difieran apreciablemente de  $\mathbf{k}^*$  no contribuyen por ser nula la amplitud  $F$  correspondiente. Así, definiendo la velocidad de grupo

$$c_j = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \Big|_{\mathbf{k}^*}, \quad (11.24)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}, t) &= \exp[i(\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}^*)t)] \int F(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{x} - \mathbf{c}t) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*)] d^n k \\ &= \exp[i(\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}^*)t)] A(\mathbf{x} - \mathbf{c}t). \end{aligned}$$

Vemos entonces que la amplitud  $A$  de las ondas del modo  $\mathbf{k}^*$  se traslada con velocidad  $\mathbf{c}$ . Si bien es conceptualmente sencillo, en la práctica el paquete de ondas es difícil de generar en el contexto de la mecánica de fluidos. Una posibilidad sería tener una pared oscilante en un canal (como los generadores de olas en las playas artificiales y las piletas) que, a frecuencia fija, comenzase a oscilar incrementando lentamente (comparado con el período de la oscilación) la amplitud, desde cero hasta un dado valor y de allí otra vez a cero. Note que el paquete debe tener necesariamente una extensión espacial de muchas longitudes de onda  $2\pi/k^*$ .

En la práctica las perturbaciones son producidas más habitualmente por fenómenos más localizados en el tiempo y el espacio, como el impacto de

piedras sobre la superficie de agua en un estanque, gotas de lluvia sobre charcos, etc.. En tales casos la alta localización de la perturbación requiere la superposición de un rango muy extenso de números de onda para su descripción. Ciertamente, los modos con longitudes de onda cercanos a las dimensiones del objeto que produce la perturbación serán los de mayor amplitud, pero se requiere un espectro extenso para una descripción apropiada.

Consideremos entonces que una perturbación localizada fue generada en un medio dispersivo. Como las fases de los distintos modos se mueven con velocidades distintas, los diferentes modos se irán separando a medida que se propaguen. Así, en un tiempo suficientemente grande la perturbación consistirá en un largo tren de ondas en el que cada modo ocupará una posición espacial (variable en el tiempo) diferenciada, que podemos escribir como

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) \exp[i\theta(\mathbf{x}, t)], \quad (11.25)$$

en donde la amplitud  $A$  es una función suavemente variable del espacio y del tiempo. Esta expresión puede justificarse si se analiza el comportamiento de (11.21) en tiempos y distancias “grandes” respecto de la perturbación inicial. Tomemos para esto formalmente  $t \rightarrow \infty$  con la condición  $\mathbf{x}/t = \mathbf{cte}$ . y escribamos

$$\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \left[ \omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{x}}{t} \right] t \equiv \Omega(\mathbf{k})t, \quad (11.26)$$

para reescribir (11.21) como

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int F(\mathbf{k}) \exp[-i\Omega(\mathbf{k})t] d^n k.$$

Como  $t \rightarrow \infty$  la exponencial es una función de  $\mathbf{k}$  rápidamente oscilante, por lo que la contribución principal a la integral será de valores de  $\mathbf{k}$  en el entorno del valor  $\mathbf{k}_0$  en el que  $\Omega(\mathbf{k})$  es mínimo, o sea,

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k_j} \right|_{\mathbf{k}_0} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \right|_{\mathbf{k}_0} - \frac{x_j}{t} = 0, \quad (11.27)$$

alrededor del cual podemos aproximar por Taylor

$$\Omega(\mathbf{k}) \simeq \Omega(\mathbf{k}_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k_l \partial k_m} \right|_{\mathbf{k}_0} (k_l - k_{0l})(k_m - k_{0m}),$$

y escribir

$$\zeta(\mathbf{x}, t) \simeq F(\mathbf{k}_0) \exp[-i\Omega(\mathbf{k}_0)t] \int \exp \left[ -\frac{it}{2} \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k_l \partial k_m} \right|_{\mathbf{k}_0} (k_l - k_{0l})(k_m - k_{0m}) \right] d^n k.$$

Si en la integral se hace el cambio de variable  $\mathbf{z} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/\sqrt{t}$  se tiene finalmente la expresión (11.25) en la que

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, t) &= \frac{F[\mathbf{k}_0(\mathbf{x}, t)]}{t^{n/2}} \int \exp \left[ -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k_l \partial k_m} \Big|_{\mathbf{k}_0(\mathbf{x}, t)} z_l z_m \right] d^n z \\ &\equiv \frac{\Pi[\mathbf{k}_0(\mathbf{x}, t)]}{t^{n/2}}, \end{aligned} \quad (11.28)$$

y

$$\theta(\mathbf{x}, t) = -\Omega[\mathbf{k}_0(\mathbf{x}, t)] t = \mathbf{k}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x} - \omega[\mathbf{k}_0(\mathbf{x}, t)] t. \quad (11.29)$$

Nótese que  $\mathbf{k}_0$  es una función de  $(\mathbf{x}, t)$  a través de la condición (11.27). Un punto a remarcar es que derivando (11.29) tenemos

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_l} = k_{0l} + \frac{\partial k_{0m}}{\partial x_l} \left( x_m - \frac{\partial \omega}{\partial k_{0m}} t \right) = k_{0l}, \quad (11.30)$$

y

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega(\mathbf{k}_0) + \frac{\partial k_{0m}}{\partial t} \left( x_m - \frac{\partial \omega}{\partial k_{0m}} t \right) = -\omega(\mathbf{k}_0), \quad (11.31)$$

en los que se usó la condición (11.27). Así,  $\nabla \theta$  es el vector de onda local en el  $(\mathbf{x}, t)$  dado, y  $-\partial \theta / \partial t$  la correspondiente frecuencia angular local. Nótese además que la relación entre la frecuencia y vector de onda locales es la dada por la relación de dispersión original, que fue deducida para modos puros de Fourier.

Con toda esta introducción podemos ahora justificar el punto ii); si derivamos (11.30) respecto de  $t$ , (11.31) respecto de  $x_l$  y restamos ambas expresiones tenemos

$$0 = \frac{\partial k_{0l}}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k_{0m}} \frac{\partial k_{0m}}{\partial x_l} = \frac{\partial k_{0l}}{\partial t} + c_{0m} \frac{\partial k_{0m}}{\partial x_l}, \quad (11.32)$$

donde se usó la definición de la velocidad de grupo (11.24) correspondiente a  $\mathbf{k}_0$ . Pero como por (11.30) tenemos que

$$\frac{\partial k_{0m}}{\partial x_l} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_m \partial x_l} = \frac{\partial k_{0l}}{\partial x_m},$$

podemos reescribir (11.32) como

$$\frac{\partial \mathbf{k}_0}{\partial t} + (\mathbf{c}_0 \cdot \nabla) \mathbf{k}_0 = 0, \quad (11.33)$$

que nos dice que el vector de onda no varía respecto de un observador que se mueve con la velocidad de grupo correspondiente; nótese que  $\mathbf{c}_0$  es constante para cada  $\mathbf{k}_0$ .

Por otro lado, un “frente” caracterizado por un valor fijo de la fase  $\theta = \theta^*$  satisface que

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t}dt + \frac{\partial\theta}{\partial x_l}dx_l = 0,$$

condición que se reescribe por (11.30) y (11.31) como

$$-\omega(\mathbf{k}_0)dt + \mathbf{k}_0 \cdot d\mathbf{x} = 0,$$

esto es, en la dirección del vector de onda el frente avanza con la velocidad de fase  $\omega(\mathbf{k}_0)/k_0$ . Así; en un medio dispersivo, al ser diferentes las velocidades de fase y de grupo, el frente de onda irá variando su frecuencia y vector de onda a medida que avanza. Correspondientemente, al seguir un vector de onda dado moviéndose con la velocidad de grupo se verán pasar los distintos frentes a medida que éstos adquieran el valor de  $\mathbf{k}_0$  que se esté siguiendo.

Finalmente, consideremos el punto iii). Para esto tengamos en cuenta que la energía de la perturbación está en general asociada al cuadrado de la amplitud. Consideremos entonces la integral

$$W(t) = \int_{V(t)} \zeta^2(\mathbf{x}, t) d^n x,$$

realizada en un instante dado, donde  $V(t)$  es una región genérica del espacio, y  $W(t)$  es entonces proporcional a la energía de la perturbación contenida en ella. Consideremos un tiempo suficientemente largo para que valga la expresión (11.25) con (11.28) y (11.29), por lo que tenemos

$$W(t) = \int_{V(t)} \frac{\Pi(\mathbf{k}_0)\Pi^*(\mathbf{k}_0)}{t^n} d^n x. \quad (11.34)$$

Consideremos ahora la región contenida en un instante dado entre las superficies definidas por  $|\mathbf{k}_0| = k_1$  y por  $|\mathbf{k}_0| = k_2$ . La ecuación de evolución de estas superficies puede deducirse al multiplicar escalarmente la ecuación de evolución de  $\mathbf{k}_0$  por  $\mathbf{k}_0$  mismo, lo que da inmediatamente ( $|\mathbf{k}_0| = k_0$ )

$$\frac{\partial k_0}{\partial t} + \mathbf{c}_0 \cdot \nabla k_0 = 0;$$

como  $\mathbf{c}_0$  depende de  $\mathbf{k}_0$ , para  $k_0$  fijo dependerá de la dirección (salvo que el medio sea isótropo) y las regiones en las que  $k_0$  es constante no son necesariamente círculos (en dos dimensiones, o esferas en tres dimensiones). De todos modos estas curvas (o superficies) se mueven, en cada dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  dada, con las velocidades de grupo  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_0(k_0 = k_1, \hat{\mathbf{n}})$  y  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_0(k_0 = k_2, \hat{\mathbf{n}})$ , de manera que sus posiciones están dadas por la curva que describen, en un

$t$  fijo, los extremos de los vectores  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}_1 t$  y  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{c}_2 t$  al barrer todas las direcciones  $\hat{\mathbf{n}}$ .

La idea es entonces hacer en la integral (11.34) el cambio de variable  $\mathbf{x} = \mathbf{c}_0 t$  con lo que se tiene

$$W(t) = \int_{k_0=k_1}^{k_0=k_2} \Pi(\mathbf{k}_0) \Pi^*(\mathbf{k}_0) \left| \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{k}_0} \right| d^n k_0,$$

donde el jacobiano  $|\partial \mathbf{c}_0 / \partial \mathbf{k}_0|$  depende, por supuesto, sólo de  $\mathbf{k}_0$ . De esta manera,  $W$  no depende del tiempo, por lo que se concluye que la energía contenida entre los modos con número de onda  $k_1$  y  $k_2$  es transportada dentro de la región cuya frontera se mueve con la velocidad de grupo correspondiente. Podemos así hablar del transporte de la energía de un  $k$  con la velocidad de grupo  $\mathbf{c}_0(k_0 = k, \hat{\mathbf{n}})$ .

Un punto importante se refiere al cambio de sistema de referencia. Si la relación de dispersión fue calculada en un dado referencial  $S$  en el que las posiciones están dadas por el vector  $\mathbf{x}$ , al pasar a otro referencial  $S'$  que se mueve respecto del original con velocidad  $\mathbf{U}$ , en el que las posiciones se determinan por  $\mathbf{x}'$ , se tiene la relación  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{U}t$ , por lo que la fase de un modo de Fourier  $\mathbf{k}$  se escribe

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - [\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}]t.$$

De esta manera, en el referencial  $S'$  la relación de dispersión está dada en términos de la calculada en  $S$  por

$$\omega'(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}, \quad (11.35)$$

que no expresa otra cosa que el corrimiento Doppler.

Como ejemplo de aplicación importante consideremos un objeto (un barco, por ejemplo) que se mueve con velocidad  $\mathbf{U}$  constante en agua quieta muy profunda. El objeto emitirá continuamente ondas en un gran rango de números de onda y en todas las direcciones. La superposición de la mayoría de ellas, al hacerlo con fases variables, tenderá a cancelar las contribuciones y a producir un efecto poco apreciable. Sin embargo, algunas perturbaciones con la orientación y velocidad de fase apropiadas se superpondrán para generar un patrón permanente. Desde un sistema de referencia que se mueve con el objeto el patrón permanente se verá como estático, lo que corresponde a frecuencia nula. Como para objetos grandes las ondas capilares tienen un contribución despreciable, basta considerar la rama de ondas gravitatorias puras, que para aguas profundas corresponde a  $\omega(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{gk}$ . Así, por (11.35), tomando  $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{e}}_x$ ,

$$\omega'(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{gk} - kU \cos \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forma  $\mathbf{k}$  con el eje  $x$ . Las ondas que contribuyen al patrón permanente cumplen  $\omega'(\mathbf{k}) = 0$ , o sea,

$$\sqrt{g/k} = U |\cos \alpha|. \quad (11.36)$$

De esta manera, a lo largo de cada dirección  $\alpha$  se establece un patrón estático de número de onda  $k$  dado por la relación (11.36). Sin embargo, la perturbación visible, en el sentido que contiene la energía asociada a este número de onda, se propaga con la velocidad de grupo  $\partial\omega'/\partial\mathbf{k}$  correspondiente. Si se sitúa el origen de coordenadas en el objeto, la energía de la perturbación logrará alcanzar sólo la región del espacio dada por

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial\omega'}{\partial k_x} t = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \cos \alpha - U \right) t, \\ y' &= \frac{\partial\omega'}{\partial k_y} t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \sin \alpha t, \end{aligned}$$

al variar  $0 \leq t < \infty$  y  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Usando (11.36) podemos escribir estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} x' &= \left( \frac{1}{2} \cos \alpha |\cos \alpha| - 1 \right) Ut, \\ y' &= \frac{1}{2} \sin \alpha |\cos \alpha| Ut, \end{aligned}$$

donde se ve inmediatamente que  $x' < 0$ ; al eliminar el tiempo se genera la ecuación

$$y' = x' \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha |\cos \alpha| - 2} \equiv x' \tan \delta.$$

Al variar  $\alpha$  entre 0 y  $2\pi$  se verifica que  $-\arctan(1/\sqrt{8}) \leq \delta \leq \arctan(1/\sqrt{8})$ , por lo que las perturbaciones se encuentran detrás del objeto dentro de una región en forma de cuña con semiapertura  $\arctan(1/\sqrt{8}) \simeq 19,47^\circ$ . Es notable que este resultado sea independiente de la forma y tamaño del objeto y de su velocidad, lo que fue establecido por primera vez por Kelvin.

## 11.4. Inestabilidad de flujos con cizalladura

En muchos flujos de interés la líneas de corriente de un flujo incompresible son aproximadamente paralelas, pero con velocidad espacialmente variable en direcciones perpendiculares a estas líneas (cizalladura). Los ejemplos usuales son flujos en canales y tubos, jets, estelas, etc. Estos flujos serán persistentes

si son lo suficientemente estables frente a perturbaciones que necesariamente existen en todo sistema real. Para estudiar la estabilidad de un flujo estacionario y unidimensional, dependiente de una coordenada ortogonal al flujo tomamos un campo de base de velocidades de la forma

$$U(z) \mathbf{e}_x,$$

con contornos sólidos fijos en  $z_1$  y  $z_2$ . Consideramos perturbaciones pequeñas, pero por lo demás arbitrarias, de manera que el flujo perturbado será

$$\mathbf{u} = [U(z) + \delta u_x(x, y, z, t)] \mathbf{e}_x + \delta u_y(x, y, z, t) \mathbf{e}_y + \delta u_z(x, y, z, t) \mathbf{e}_z.$$

La ecuación de continuidad del flujo incompresible, y la de Navier-Stokes, despreciando en la última los términos cuadráticos en las perturbaciones, serán, respectivamente,

$$\frac{\partial \delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} + \delta u_z D U(z) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 \delta u_x, \\ \frac{\partial \delta u_y}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 \delta u_y, \\ \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} + U(z) \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 \delta u_z, \end{aligned}$$

donde  $P$  es la presión dividida por la densidad, y  $D$  es el operador correspondiente a derivar respecto de  $z$ ,  $D = d/dz$ . Las ecuaciones anteriores son lineales en las funciones incógnitas  $\delta u_x$ ,  $\delta u_y$ ,  $\delta u_z$  y  $P$ , y no involucran coeficientes dependientes de  $(x, y, t)$  por lo que, al ser también las condiciones de contorno independientes de  $(x, y, t)$ , pueden estudiarse modos puros de Fourier (o Laplace) de dichas funciones, de la forma genérica

$$f(x, y, z, t) = \hat{f}(z) \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)],$$

lo que permite escribir las ecuaciones anteriores como

$$ik_x \delta \hat{u}_x + ik_y \delta \hat{u}_y + D \delta \hat{u}_z = 0, \quad (11.37)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \delta \hat{u}_x + ik_x U(z) \delta \hat{u}_x + \delta \hat{u}_z D U(z) &= -ik_x \hat{P} + \nu(D^2 - k^2) \delta \hat{u}_x, \\ -i\omega \delta \hat{u}_y + ik_x U(z) \delta \hat{u}_y &= -ik_y \hat{P} + \nu(D^2 - k^2) \delta \hat{u}_y, \\ -i\omega \delta \hat{u}_z + ik_x U(z) \delta \hat{u}_z &= -D \hat{P} + \nu(D^2 - k^2) \delta \hat{u}_z, \end{aligned}$$

donde  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Es conveniente definir a la frecuencia angular  $\omega$  como  $\omega = k_x c$ , en la que la constante  $c$  tiene unidades de velocidad. Con esto, multiplicando la componente  $x$  de la ecuación de Navier-Stokes por  $ik_x$ , la componente  $y$  por  $ik_y$ , y sumando ambas, se obtiene

$$ik_x [U(z) - c] (ik_x \delta \hat{u}_x + ik_y \delta \hat{u}_y) + ik_x \delta \hat{u}_z DU(z) = k^2 \hat{P} + \nu(D^2 - k^2) (ik_x \delta \hat{u}_x + ik_y \delta \hat{u}_y),$$

de la que, al usar la ecuación de continuidad (11.37) para escribir  $ik_x \delta \hat{u}_x + ik_y \delta \hat{u}_y = -D \delta \hat{u}_z$ , obtenemos

$$-ik_x [U(z) - c] D \delta \hat{u}_z + ik_x \delta \hat{u}_z DU(z) = k^2 \hat{P} - \nu(D^2 - k^2) D \delta \hat{u}_z.$$

Si a esta ecuación le aplicamos el operador  $D$  resulta

$$-ik_x [U(z) - c] D^2 \delta \hat{u}_z + ik_x \delta \hat{u}_z D^2 U(z) = k^2 D \hat{P} - \nu(D^2 - k^2) D^2 \delta \hat{u}_z.$$

Finalmente, notando que de la componente  $z$  de la ecuación de Navier-Stokes puede escribirse que

$$D \hat{P} = -ik_x [U(z) - c] \delta \hat{u}_z + \nu(D^2 - k^2) \delta \hat{u}_z,$$

obtenemos la ecuación final

$$ik_x [D^2 U - (U - c)(D^2 - k^2)] \delta \hat{u}_z + \nu(D^2 - k^2)^2 \delta \hat{u}_z = 0. \quad (11.38)$$

Esta ecuación es denominada de Orr-Sommerfeld. Las condiciones de contorno que deben satisfacerse son las de perturbaciones de velocidad nulas en las paredes fijas que, usando la (11.37), pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \delta \hat{u}_z &= 0, \\ D \delta \hat{u}_z &= 0 \end{aligned}$$

en cada contorno. Estando los contornos sólidos en  $z_{1,2}$  se tienen las cuatro condiciones necesarias para resolver (11.38), que es una ecuación diferencial de cuarto orden, lineal y homogénea para la variable  $\delta \hat{u}_z(z)$ , dado el perfil de base  $U(z)$ .

Si se considera que el vector de onda  $(k_x, k_y)$  es real, para cada valor de éste existirán soluciones no nulas de (11.37) sólo para ciertos valores de la constante  $c$ , que serán en general complejos. De esta manera, si la parte imaginaria de  $\omega = k_x c$  es positiva se tendrá un crecimiento exponencial de la perturbación, y se dice que el correspondiente modo es linealmente inestable. Un dado perfil de base es entonces estable si no existen modos con parte real positiva de  $k_x c$ . Aunque la solución de (11.37) es en general numérica, existe una serie de resultados generales importantes que pueden deducirse sin resolverla.

### 11.4.1. Teorema de Squire

Este teorema asegura que si un perfil  $U(z)$  presenta una perturbación tridimensional ( $k_x \neq 0, k_y \neq 0$ ) inestable para un cierto valor de la viscosidad  $\nu$ , entonces existe una perturbación bidimensional ( $k'_x \neq 0, k'_y = 0$ ) inestable para un valor mayor de la viscosidad. Nótese que para un dado perfil el aumentar la viscosidad corresponde a disminuir el número de Reynolds. De esta manera, el teorema de Squire es útil para determinar si existen modos inestables estudiando sólo perturbaciones bidimensionales (con  $k_y = 0$ ), que a su vez determinarán el número de Reynolds más bajo a partir del cual se desarrollará inestabilidad.

La prueba del teorema es muy sencilla. Si, por hipótesis, existe un modo inestable tridimensional para una dada viscosidad  $\nu_1$ , la ecuación que satisface ese modo es por supuesto la ecuación de Orr-Sommerfeld (11.37) que reescribimos como

$$\frac{\nu_1}{ik_x}(D^2 - k^2)^2 \delta \hat{u}_z = [(U - c)(D^2 - k^2) - D^2U] \delta \hat{u}_z.$$

Si consideramos ahora un modo bidimensional con ( $k'_x \neq 0, k'_y = 0$ ) para una viscosidad  $\nu_2$  la ecuación es

$$\frac{\nu_2}{ik'_x}(D^2 - k'^2)^2 \delta \hat{u}_z = [(U - c)(D^2 - k'^2) - D^2U] \delta \hat{u}_z.$$

De donde vemos que si tomamos  $k'_x = k$  y  $\nu_2/k'_x = \nu_1/k_x$ , a ambas ecuaciones corresponde el mismo valor de  $c$ , que sabemos por hipótesis que corresponde a un modo inestable. Además, para el modo bidimensional es

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{k'_x}{k_x} = \nu_1 \frac{k}{k_x} = \nu_1 \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_x} > \nu_1.$$

### 11.4.2. Teorema de Rayleigh del punto de inflexión

Este teorema analiza la ecuación de Orr-Sommerfeld (11.37) en el límite de Reynolds  $\rightarrow \infty$  ( $\nu \rightarrow 0$ ). En tal caso la ecuación de Orr-Sommerfeld puede ser aplicada sólo fuera de las capas límite, por lo que la condición de contorno a usar es sólo la de no penetración del fluido en la pared sólida,  $\delta \hat{u}_z = 0$  en  $z_{1,2}$ , mientras que la ecuación se reduce a

$$[D^2U - (U - c)(D^2 - k^2)] \delta \hat{u}_z = 0. \quad (11.39)$$

Una propiedad importante de esta ecuación es que tomando su complejo conjugado se tiene

$$[D^2U - (U - c^*)(D^2 - k^2)] \delta \hat{u}_z^* = 0,$$

que cumple las mismas condiciones de contorno  $\delta\hat{u}_z^* = 0$  en  $z_{1,2}$ , por lo que si existe un modo con  $c$  complejo, también existirá otro de valor  $c^*$ , y así alguno de ambos será el de parte imaginaria positiva con lo que se verifica la inestabilidad del perfil. De esta manera, la condición de inestabilidad de un perfil, cuando  $\nu \rightarrow 0$ , es que admita al menos un modo  $c$  complejo. El teorema de Rayleigh asegura que una condición necesaria para que existan modos con  $c$  complejo es que dicho perfil tenga un punto de inflexión. Para probar este teorema escribimos la ecuación (11.39) como

$$D^2\delta\hat{u}_z - \left[ k^2 + \frac{D^2U}{U-c} \right] \delta\hat{u}_z = 0,$$

que si la multiplicamos por la conjugada  $\delta\hat{u}_z^*$  e integramos entre  $z_1$  y  $z_2$  nos da (integrando por partes el primer término de la izquierda y usando las condiciones de contorno)

$$- \int_{z_1}^{z_2} |D\delta\hat{u}_z|^2 dz - \int_{z_1}^{z_2} \left[ k^2 + \frac{D^2U}{|U-c|^2} (U-c^*) \right] |\delta\hat{u}_z|^2 dz = 0. \quad (11.40)$$

La parte imaginaria de esta ecuación es

$$\text{Im}(c) \int_{z_1}^{z_2} \frac{D^2U}{|U-c|^2} |\delta\hat{u}_z|^2 dz = 0. \quad (11.41)$$

Notemos que si el perfil  $U(z)$  no tiene un punto de inflexión la integral no puede anularse, y por lo tanto  $\text{Im}(c) = 0$ , lo que nos asegura la estabilidad. De esta manera es condición necesaria (aunque no suficiente) es que el perfil tenga un punto de inflexión para ser inestable. Esta es la expresión del teorema de Rayleigh del punto de inflexión.

Con un poco de análisis adicional pueden agregarse otras condiciones, de las cuales tal vez la más útil es la debida a Fjortoft, que puede deducirse de tomar la ecuación (11.40), en la cual además consideramos que el perfil es inestable, por lo cual  $\text{Im}(c) \neq 0$ , y por lo tanto la integral en (11.41) es nula, que nos permite escribir (11.40) como

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{D^2U}{|U-c|^2} U |\delta\hat{u}_z|^2 dz = - \int_{z_1}^{z_2} (|D\delta\hat{u}_z|^2 + k^2 |\delta\hat{u}_z|^2) dz,$$

por lo que en caso de inestabilidad debe ser

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{D^2U}{|U-c|^2} U |\delta\hat{u}_z|^2 dz < 0. \quad (11.42)$$

Si  $U$  no cambia de signo, que es el caso habitual, la conclusión práctica de esta desigualdad es que una condición necesaria de inestabilidad es  $D^2U < 0$

en algún lugar del flujo. Sin embargo, considerando que en la condición de flujo inestable la integral en (11.41) es nula, podemos incluir en (11.42) un término proporcional a dicha integral para escribir

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{D^2 U}{|U - c|^2} (U - U_0) |\delta \hat{u}_z|^2 dz < 0, \quad (11.43)$$

donde  $U_0$  es una constante arbitraria con unidades de velocidad. De (11.43) resulta entonces la condición necesaria más general de inestabilidad que dice que en alguna región del flujo debe ser  $D^2 U (U - U_0) < 0$ . Por supuesto, dado que la condición es necesaria pero no suficiente, tomar un valor arbitrario de  $U_0$  no es en general práctico (aunque debe considerarse su utilidad en algún caso particular). Fjortoft propone como condición útil en general tomar  $U_0$  igual al valor de la velocidad en el punto de inflexión. De esta manera, puede verse con facilidad que muchos flujos que de acuerdo a Rayleigh podrían ser inestables por tener un punto de inflexión, resultan ser en realidad estables al aplicar el criterio de Fjortoft.