Estructura de la Materia 1

(Curso de Verano 2018 - Daniel Gómez)

Guía 1: Cinemática e hidrostática

1. Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = f(z),$$

para $t \geq 0$ y $z \geq 0$. Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

2. Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),$$

donde T_0, α, L y τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante U.

(a) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geométricamente las componentes de la derivada total.

(b) Repita el punto (a) para una descripción lagrangiana.

¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

3. Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades:

(a) Una corriente uniforme $\mathbf{u}(x,t) = U\hat{x}$.

(b) Una fuente lineal de caudal constante $\mathbf{u}(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$.

(c) Un torbellino con circulación constante $\mathbf{u}(r,\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$.

(d) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad U aumenta linealmente con el tiempo.

(e) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad U' de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ.

4. Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x,y,t) = \frac{\alpha x}{1+\beta t}, \qquad v_y(x,y,t) = c,$$

donde α, β y c son constantes con las dimensiones apropiadas. Grafique las distintas líneas en dos casos distintos:

(a) $\alpha = \beta$

(b) $\alpha = 2\beta$

5. Una esfera de radio R_0 en $t = 0$ se expande para $t > 0$ de acuerdo a la ley

$$R = R(t), \quad R(0) = R_0.$$

Encuentre dicha ley sabiendo que para $t > 0$ y $r > R(t)$, la velocidad de las partículas de fluido es $v_r(r) = v_0 R_0^2/r^2$.

6. Calcule las deformaciones longitudinales, de corte y volumétricas para los flujos del problema 3.

7. Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular Ω, la vorticidad es $\omega = 2\Omega$.

8. Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades:

   (a) $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$

   (b) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

   (c) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - e^{-r^2/(4\nu t)}\right]$

   (d) $v_x = v_0 y/L$

9. Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:

   (a) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.

   (b) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección $\hat{z}$.

   (c) Idem (b) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano (x, y) y contiene al origen, es el mismo.

10. *Taquímetro hidrostático:* Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio R y altura $2H$, inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme Ω.

    (a) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?

    (b) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?

    (c) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si $R = 5$ cm, $H = 7.5$ cm, $g = 10$ m/s^2? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.

    (d) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (c), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:

       i. En reposo

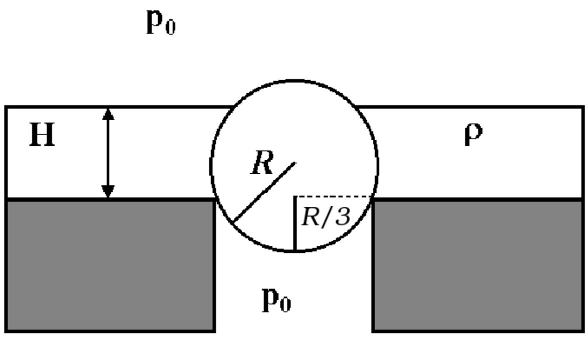
       ii. Cuando el recipiente rota con frecuencia $\nu = 90$ r.p.m.

    (e) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

11. *Modelo de ciclón:* Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio a, que rota rígidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante Ω. Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en $r = a$, donde r es la coordenada radial cilíndrica con el eje z coincidente con el eje del núcleo.

    (a) Determine el campo de velocidades para todo valor de r.

    (b) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo r, en función de la presión muy lejos del eje p_∞. Encuentre qué condición debe satisfacer Ω respecto del valor de la presión p_∞.



12. Una esfera sólida de densidad σ uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad ρ, en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura H desde el fondo de la pileta. Analice bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe. Para ello:
    (a) Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de H (tenga en cuenta que el líquido puede tapar o no totalmente a la esfera).
    (b) Grafique el empuje como función de H e interprete cualitativamente.
    (c) Si $\sigma = \alpha\rho$, verifique que el valor mínimo de α para el cual se obtiene obturación para todo H es $\alpha = 8/27$.

13. Calcule la fuerza total (y el punto de aplicación de la misma) que sufre una de las caras de una superficie plana S, de forma arbitraria, cuyo plano forma un ángulo α con la horizontal, y que se encuentra sumergida completamente en un líquido estático de densidad ρ . Sugerencia: utilice un sistema de coordenadas con origen en S y con uno de sus ejes perpendicular a dicha superficie.

14. El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad en ausencia de presión y K una constante.
    (a) Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa y de volumen $\mathbf{F} = g\hat{z}$, determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en $z = 0$ es $\rho = \rho_0$.
    (b) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ($K \to \infty$). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ($K = 2 \times 10^9$ N/m^2, $\rho_0 = 1000$ Kg/m^3) (desprecie la presión en la superficie).
    (c) Considere ahora un gas ideal con ecuación de estado $p = \rho RT/m$, con R la constante universal de los gases y m la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas $\mathbf{F} = -g\hat{z}$, la presión a una altura z está dada por

$$p = p_0 \exp\left\{-\frac{mg}{R}\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}\right\}.$$

    (d) Muestre que si T depende de x, y y z no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

15. *Modelo simplificado de la atmósfera terrestre:* Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura z sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores p_0, ρ_0 y T_0 respectivamente. Suponga que la Tierra es plana, la gravedad es constante y que la atmósfera está en reposo. Considere al aire como un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan mediante la relación $p\rho^{-\gamma} = cte.$ (atmósfera adiabática).

16. *Estrella autogravitante (equilibrio entre la gravedad propia y la presión):* Obtener una expresión para la presión de una estrella esférica autogravitante, en los siguientes casos:

    (a) Densidad de masa uniforme ($\rho = \rho_0$). Verifique que la estrella tiene un radio finito (¿Cuál es la condición para que esto ocurra?).

    (b) El gas satisface la ecuación de estado $p = C\rho^{6/5}$. Observe que en esta situación la estrella se extiende indefinidamente, pero su masa es finita.

    Utilice que el potencial autogravitatorio ϕ satisface $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ con G la constante de gravitación, de modo que si $-\rho\nabla\phi = \nabla p$, la ecuación a resolver será $\nabla \cdot \nabla(p/\rho) = -4\pi G\rho$.