Estructura de la Materia 1

(Primer Cuatrimestre 2019 - Daniel Gómez)

Guía 3: Fluidos ideales incompresibles

1. *Flujos singulares:* Los siguientes fluidos incompresibles e ideales fluyen de tal manera que su movimiento puede ser considerado bidimensional (2D), es decir, que existe simetría de traslación en una dirección que asociaremos con el eje z.

   (a) Una corriente uniforme al infinito, de velocidad constante en módulo U_∞ que forma un ángulo α con el eje x.

   (b) Una distribución lineal de fuentes o sumideros de caudal $\pm Q$ respectivamente.

   (c) Un vórtice de circulación Γ.

   (d) Un dipolo formado por una fuente y un sumidero de idéntico caudal (en módulo).

   (e) Un dipolo formado por dos vórtices de circulación Γ iguales en módulo y opuestos en sentido.

   Para cada flujo determine:

   i. el campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y)$,

   ii. el rotor $\omega(x, y) = \nabla \times \mathbf{v}$,

   iii. la función de corriente $\psi(x, y)$ y el gráfico de las líneas de corriente.

2. *Flujos no singulares:* Para las siguientes funciones de corriente (donde a, b, c y d son constantes),

   (a) $\psi(x, y) = ay$,

   (b) $\psi(x, y) = by^2$,

   (c) $\psi(x, y) = cxy$,

   (d) $\psi(x, y) = d(3x^2y - y^3)$,

   determine:

   i. el campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y)$,

   ii. los puntos de estancamiento (los puntos del plano donde $\mathbf{v} = 0$).

   iii. la vorticidad $\omega(x, y)$,

   iii. el gráfico de las líneas de corriente.

3. *Potencial complejo:* El movimiento de un fluido incompresible e irrotacional bidimensional puede ser estudiado bajo el formalismo del potencial complejo. La hipótesis de incompresibilidad conduce a la existencia de un potencial vector $\mathbf{A}$ que en el caso 2D se reduce a $\mathbf{A} = \psi(x, y)\hat{z}$ a partir del cual se puede determinar el campo de velocidades. Por otro lado, de la condición de irrotacionalidad se sigue la existencia de una función escalar $\varphi(x, y)$ tal que $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Verifique que se cumple lo siguiente:

   (a) $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot \{\nabla \times [\psi(x, y)\hat{z}]\} = 0$, y por lo tanto, $\mathbf{v}(x, y) = \nabla\psi(x, y) \times \hat{z}$.

   (b) las funciones $\psi(x, y)$ y $\varphi(x, y)$ son armónicas y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

   (c) $\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = -i\frac{\partial W}{\partial y}$ donde el potencial complejo está definido como $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, con $z = z + iy$.

(d) $\frac{dW}{dz} = \tilde{v}^*$ donde $\tilde{v} = v_x + iv_y$ es la velocidad compleja.

4. Calcule el potencial complejo de las configuraciones del problema 1.

5. *Flujos producidos por singularidades en presencia de contornos sólidos:* Para las siguientes configuraciones de fluidos incompresibles e irrotacionales, calcule el potencial complejo, el potencial de velocidades, la función de corriente, el campo de velocidades y los puntos de estancamiento. Grafique cualitativamente las líneas de corriente.

   (a) Una fuente (sumidero) de caudal Q $(-Q)$ ubicada a una distancia d de un plano infinito.

   (b) Idem (a) pero a una distancia $\sqrt{2}d$ de la intersección de dos planos semi-infinitos que forman un ángulo $\pi/2$ entre ellos.

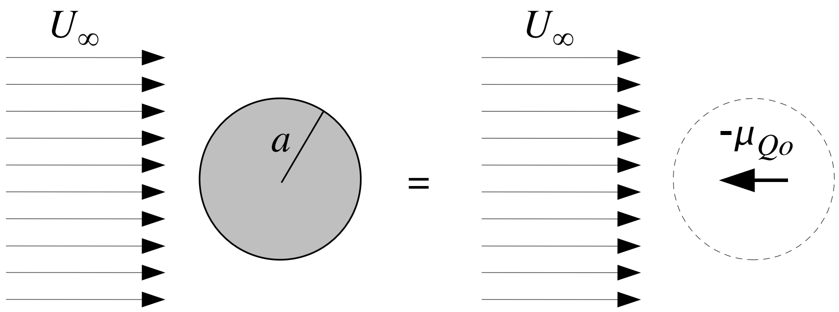
   (c) Idem (a) entre dos planos infinitos paralelos a la misma distancia d de cada uno de ellos.

   (d) Un vórtice de circulación $\Gamma > 0$ a distancia d de un plano infinito.

   (e) Un dipolo de intensidad μ_{Q_0} y ángulo α respecto al eje real (x) a distancia d de un plano infinito. Considere luego en particular el caso $\alpha = \pi$ (el dipolo apuntando hacia el plano).

   (f) Un dipolo de intensidad μ_{Γ_0} y ángulo α a distancia d de un plano infinito.

6. *Flujo alrededor de un cilindro:* La superposición del flujo producido por un dipolo de intensidad μ_{Q_0} enfrentado a un flujo uniforme al infinito, de velocidad $O_\infty \hat{x}$, genera un flujo que corresponde exactamente al flujo ideal externo de una corriente uniforme al infinito en presencia de un cilindro sólido.



   (a) Calcule el potencial complejo de la configuración.

   (b) Aplicando el teorema del círculo al problema del flujo uniforme frente al cilindro de radio a, encuentre cuál debe ser el módulo de la intensidad del dipolo imagen y su dirección para que el contorno del cilindro, $|z| = a$, sea una línea de corriente.

   (c) ¿Dónde se encuentran los puntos de estancamiento?

   (d) Encuentre una expresión para la presión sobre el cilindro como función del ángulo.

   (e) ¿Cuál es la fuerza que el fluido ejerce sobre el cilindro?

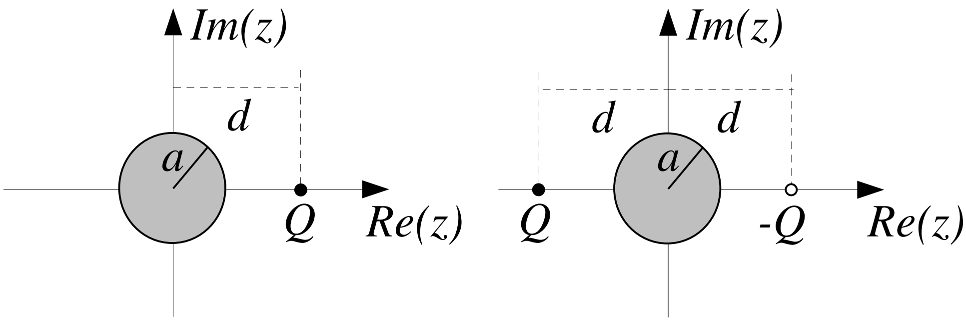
7. Para las configuraciones de sólidos y singularidades con simetría de traslación en fluidos ideales, incompresibles e irrotacionales que se muestran en las figuras:

   (a) Haga un diagrama cualitativo de la líneas de corriente.

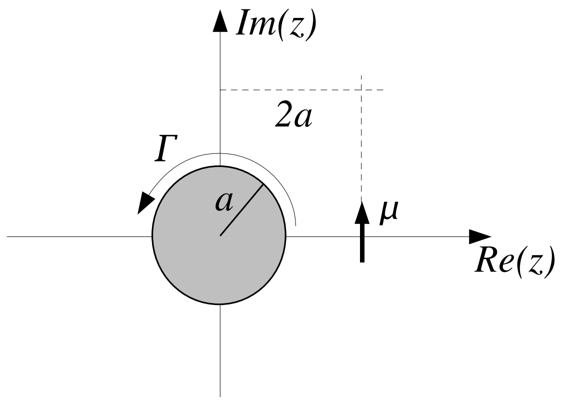
   (b) Escriba el potencial complejo.

   (c) Halle los puntos de estancamiento.

   (d) Grafique la presión como función de la posición, para puntos del contorno sólido.

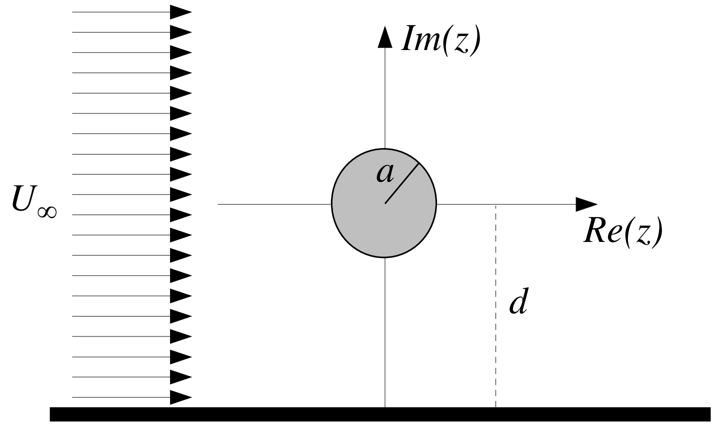


8. Se tiene un cilindro infinito de radio a con circulación atrapada Γ, inmerso en un fluido incompresible e irrotacional de densidad ρ. A una distancia $2a$ se encuentra un dipolo de intensidad μ_0, orientado según se muestra en la figura. Halle el valor de μ_0 para que la fuerza sobre el cilindro sea nula.



9. Calcule la fuerza que el fluido ejerce sobre el sólido para el problema 6.

10. Calcule la fuerza que sufre el cilindro para la configuración de la figura. Para ello, elija la aproximación a orden más bajo en el potencial complejo que de una fuerza no nula. ¿Dónde están los puntos de estancamiento?

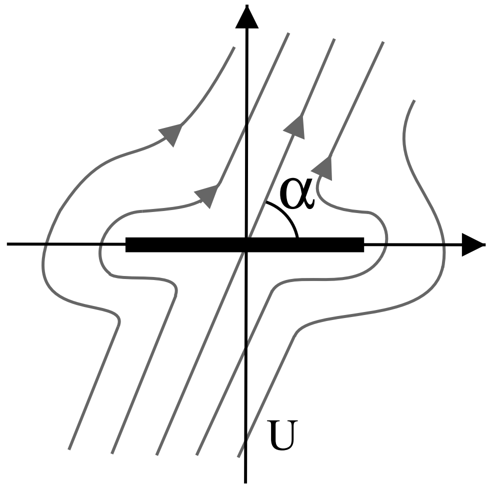


11. La transformación $z = w - 1/w$ transforma el círculo $|w| = 1$ en un segmento de longitud 4 entre $z = -2$ y $z = 2$.

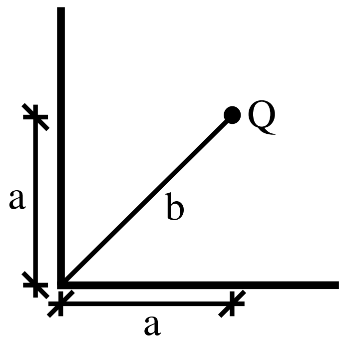
(a) Verifique esta transformación: verifique que los puntos del círculo se mapean en el segmento, y los puntos externos al círculo en el resto del plano complejo z.

(b) Utilizando esta transformación, calcule el potencial φ, la función de corriente ϕ, y el campo de velocidades resultante para la configuración que se muestra en la figura.

(c) Pruebe que si $\sin\alpha \neq 0$, la velocidad del fluido es infinita en dos puntos. ¿Cuáles son esos puntos? ¿Cuánto vale la velocidad en el punto medio del segmento?



12. La figura muestra un fluido ideal, incompresible e irrotacional que llena completamente el interior de un codo con ángulo recto. A una distancia $b = \sqrt{2}a$del codo se encuentra una fuente de caudal Q.



(a) Halle la transformación conforme que transforma el interior del codo en el semiplano $y > 0$. Encuentre la posición de la fuente al aplicar la transformación.

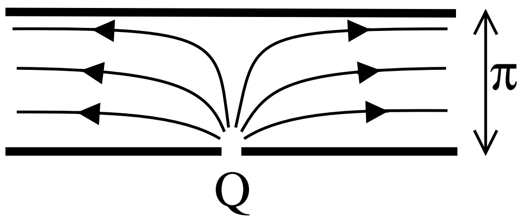
(b) Escriba el potencial complejo para la configuración de la figura.

(c) Dibuje cualitativamente las lineas de corriente.

(d) Calcule los puntos de estancamiento.

13. Considere un flujo estacionario plano como el que se muestra en la figura. El caudal en cada extremo del tubo es $Q/2$.

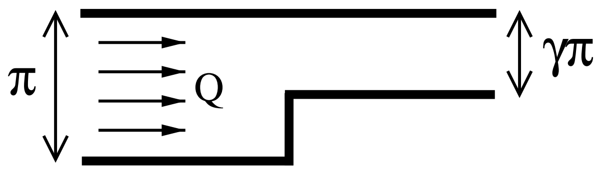
(a) Obtenga la transformación de Schwartz-Christoffel que transforma la región $0 < y < \pi$ en el semiplano $y > 0$.



(b) Encuentre la posición de las fuentes y sumideros para el problema en el plano complejo luego de aplicar la transformación hallada en el punto (a).

(c) Halle el campo de velocidades en el tubo y grafique las líneas de corriente. Calcule la presión como función de la posición.

14. Usando una transformación conforme conveniente, determine el potencial φ, la función de corriente ψ, y el campo de velocidades en el canal de la figura. Grafique las líneas de corriente y calcule la presión en función de la posición.



15. Un chorro incompresible sale de un recipiente a través de una rendija infinitamente larga de ancho D. El fluido en el recipiente lejos del orificio se encuentra en reposo a una presión P, y la presión en el exterior del recipiente es $p_0 = 0$. Determine la velocidad en el chorro lejos del orificio, y la forma del chorro.