

Estructura de la Materia 1

(Primer Cuatrimestre 2019 - Daniel Gómez)

Guía 5: Inestabilidades hidrodinámicas

1. Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0 , y con un campo de velocidades bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

2. Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$, donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 1 \\ y & \text{si } -1 < y < 1 \\ -1 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

3. Para un fluido ideal homogéneo analice la estabilidad de un chorro sumergido triangular, dado por $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si } y > 1 \\ 1 - y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

4. Considere un fluido compresible isotérmico unidimensional (todas las magnitudes dependen, por ejemplo, solamente de la dirección x), con ecuación de estado

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c_s^2$$

donde c_s es la velocidad del sonido.

- (a) Escriba la ecuación de continuidad para este gas.
(b) Considere el potencial autogravitatorio por unidad de masa Φ tal que

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

con G la constante universal gravitatoria, y escriba la ecuación de Euler para el gas.

- (c) Verifique que un estado de reposo del gas con densidad uniforme ρ_0 es solución de las ecuaciones.
(d) Realice pequeñas perturbaciones sobre este equilibrio, y linealice el sistema resultante. Suponga que la perturbación es una onda plana

$$\delta \rho = \rho_1 e^{i(kx + \omega t)}$$

y halle la relación de dispersión del sistema.

- (e) Muestre que si $k^2 c_s^2 < 4\pi G \rho_0$, ω es imaginaria pura y la perturbación inicial de densidad crece exponencialmente (*inestabilidad de Jeans*). El sistema es inestable cuando la fuerza de presión del gas es menor que la fuerza gravitatoria.

5. *Bifurcación tangencial*: Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(R - R_c) - \frac{(v - U_0)^2}{L}$$

con $\alpha > 0$, $R > R_c$ y v una función solo del tiempo.

(a) Muestre que tiene soluciones estacionarias

$$v = V_{\pm} = U_0 \pm [\alpha L (R - R_c)]^{1/2}.$$

(b) Realice pequeñas perturbaciones alrededor de cada solución

$$v = V_{\pm} + \delta v$$

y obtenga ecuaciones linealizadas para la perturbación δv en cada caso.

(c) Proponga soluciones para las perturbaciones

$$\delta v = Ae^{\sigma t}$$

y muestre que la solución V_+ es estable y que la solución V_- es inestable.

6. *Bifurcación de Pitchfork*: Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = av - bv^3$$

con $a = \alpha(R - R_c)$, $\alpha > 0$ y $b > 0$.

(a) Halle las soluciones estacionarias de la ecuación.

(b) Realice pequeñas perturbaciones alrededor de cada solución y obtenga ecuaciones diferenciales para la evolución de las perturbaciones.

(c) Estudie la estabilidad de las soluciones estacionarias para $R < R_c$ y para $R > R_c$

7. *Bifurcación de Hopf*: Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y + (a - x^2 - y^2)x, \quad \frac{dy}{dt} = x + (a - x^2 - y^2)y$$

con $a = \alpha(R - R_c)$ y $\alpha > 0$.

(a) Tomando coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, muestre que son equivalentes al sistema desacoplado

$$\frac{dr}{dt} = r(a - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

(b) Estudie la estabilidad de $r = 0$ para $R < R_c$ y $R > R_c$, y de la órbita con $r = a$ para $R > R_c$.

8. Dos elementos de fluido en un flujo turbulento están inicialmente a una distancia λ_1 , donde λ_1 es una escala del rango inercial. A partir de análisis dimensional muestre que esta distancia crece como

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\epsilon\lambda)^{1/3},$$

donde ϵ es la tasa de disipación de energía por unidad de tiempo. Deduzca entonces que el tiempo requerido para que la distancia entre los dos elementos de fluido sea λ_2 (con $\lambda_2 \gg \lambda_1$) es $\tau \sim (\lambda_2^2/\epsilon)^{1/3}$.

9. A partir de análisis dimensional muestre que para un flujo turbulento en ausencia de fuerzas externas, el balance de energía se reduce a

$$\frac{dE}{dt} \sim -\epsilon.$$

Asumiendo que la energía decae en forma auto-semejante $E(t) \sim E_0 t^{-\alpha}$, y que el fluido está contenido en un recipiente con longitud característica L , muestre que $\alpha = 2$.