Práctica: Estados cuánticos de muchas partículas

Problema 1

Notar que el producto interno entre dos estados $|\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$, $|\psi_1, \ldots, \psi_N\rangle$ de N partículas idénticas puede expresarse

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_N | \psi_1, \ldots, \psi_N \rangle = \begin{vmatrix} \langle \xi_1|\psi_1\rangle & \ldots & \langle \xi_1|\psi_N\rangle \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \xi_N|\psi_1\rangle & \ldots & \xi_N|\psi_N\rangle \end{vmatrix}_\zeta ,$$

donde $\zeta = \pm$ corresponde, respectivamente para bosones y fermiones.

Partiendo de esta representación del producto interno, mostrar que si definimos operadores de creación y aniquilación tales que

$$\begin{aligned} a^\dagger(\phi)|\psi_1, \ldots, \psi_N\rangle &= |\phi, \psi_1, \ldots, \psi_N\rangle, \\ \langle \xi_1, \ldots, \xi_{N-1}|a(\phi)|\psi_1, \ldots, \psi_N\rangle &= [\langle \psi_1, \ldots, \psi_N|a^\dagger(\phi)|\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}\rangle]^*, \end{aligned} \tag{1}$$

entonces tales operadores deben obedecer las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} a^\dagger(\phi_1)a^\dagger(\phi_2) &= \zeta a^\dagger(\phi_2)a^\dagger(\phi_1), \\ a(\phi_1)a(\phi_2) &= \zeta a(\phi_2)a(\phi_1), \\ a(\phi_1)a^\dagger(\phi_2) - \zeta a^\dagger(\phi_2)a(\phi_1) &= \langle \phi_1|\phi_2\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Problema 2

Considerar un gas de partìculas indénticas descriptas por el Hamiltoniano

$$H = \sum_k \varepsilon_k b_k^\dagger b_k \tag{3}$$

Partiendo del operador densidad en el conjunto gran canónico

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{\mathcal{Z}}, \tag{4}$$

mostrar que el valor medio de la ocupación del estado de 1 partícula $|k\rangle$

$$n_k = \langle \hat{n}_k \rangle = \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{n}_k\right], \tag{5}$$

donde la traza se evalua respecto de todos los posibles autoestados de $\hat{H}$ para N partículas, $N = 0, \ldots$, da como resultado las funciones de Bose-Einstein o Fermi-Dirac, dependiendo de que se trate de bosones o fermiones, respectivamente.