Estructura de la Materia 2

Curso de Verano de 2014

Guía 7: Superconductividad. Teorías Fenomenológicas y BCS.

1.

   (a) Mostrar que $f_n(T,0) - f_s(T,0) = [H_c(T)]^2/(8\pi)$, siendo f_n, f_s las energías libres de las fases normal y superconductora, respectivamente.

   (b) Sobre la base de la teoría de Ginzburg–Landau, analizar el comportamiento de $H_c(T)$ cerca de T_c.

   (c) Mostrar que la diferencia de calor específico entre el estado normal y el superconductor puede expresarse: $c_n - c_s = [H_c(0)]^2 \left(t - 3t^3\right)/2\pi T_c$, donde $t = T/T_c$.

2.

   (a) Mostrar que de la teoría de Ginzburg–Landau se predice la ecuación de London para la corriente superconductora, indentificando $|\psi|^2 = n_s$, siendo n_s la densidad de "portadores superconductores".

   (b) Teniendo en cuenta la teoría microscópica, ¿cuál sería la relación que vincula la carga efectiva e^* del funcional de Ginzburg–Landau y la carga e de un electrón?

3. Derivar y resolver las ecuaciones de Ginzburg–Landau para una interfase superconductor-normal. Suponer que la interfase es el plano $x = 0$.

4. Teoría BCS

   (a) Probar que la función de onda del estado fundamental de la teoría BCS:

   $$|\Phi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} [1 + g_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow}] \, |0\rangle \,,$$

   puede escribirse alternativamente como un estado coherente:

   $$|\Phi\rangle = \exp\left[\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow}\right] |0\rangle \,.$$

   (b) Probar las siguientes expresiones:

   $$\begin{aligned}
   \langle\Phi|\Phi\rangle &= \prod_{\mathbf{k}} \left[1 + |g_{\mathbf{k}}|^2\right]^{1/2} = N^2 \\
   b_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N^2}\langle\Phi|c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}|\Phi\rangle = \frac{g_{\mathbf{k}}}{1 + |g_{\mathbf{k}}|^2} \\
   b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} &= \frac{1}{N^2}\,\langle\Phi|\, c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}\,|\Phi\rangle \\
   \sum_\sigma n_{\mathbf{k}\sigma} &= g_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}} + g_{-\mathbf{k}} b^*_{-\mathbf{k}}.
   \end{aligned}$$

(c) Mostrar que los valores de $b_{\mathbf{k}}$ que minimizan la energía del estado fundamental del Hamiltonano BCS satisfacen

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{g_{\mathbf{k}}}{1 + |g_{\mathbf{k}}|^2},$$

y encontrar una expresión para $g_{\mathbf{k}}$ en función de los parámetros del Hamiltoniano. Identificar la función del gap $\Delta_{\mathbf{k}}$ y notar que debe calcularse de manera autoconsistente.

(d) Escribir la ecuación autoconsistente para $\Delta_{\mathbf{k}}$ y evaluar este parámetro en el caso de una densidad de estados constante.

5. Considerar el Hamiltoniano BCS.

   (a) Mostrar que los operadores de Bogoliubov $\gamma_{\mathbf{k},\alpha}, \gamma^{\dagger}_{\mathbf{k},\alpha}$ satisfacen reglas de conmutación fermiónicas.

   (b) Calcular la ecuación del gap y obtener una expresión para la temperatura crítica en el caso de una densidad de estados contante.

   (c) Calcular el calor específico y analizar el comportamiento a bajas temperaturas. Comparar con el comportamiento a $T > T_c$.

6. El superconductor MgB_2 fue descubierto recientemente y tiene una $T_c \sim 40$K [Nature 410, 63, (2004)]. Este compuesto tiene dos bandas que cruzan el nivel de Fermi y hay indicios que la superconductividad está originada en el mecanismo electrón–fonón. Un buen punto de partida en la teoría microscópica de este material es un Hamiltoniano tipo BCS con dos bandas:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi^{(1)}_{\mathbf{k}} a^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi^{(2)}_{\mathbf{k}} b^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} b_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} a^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} a^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{k}'\uparrow}$$
$$- \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} U_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} b^{\dagger}_{\mathbf{q}\uparrow} b^{\dagger}_{-\mathbf{q}\downarrow} b_{-\mathbf{q}'\downarrow} b_{\mathbf{q}'\uparrow} - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} J_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} \left(a^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} a^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} b_{-\mathbf{q}'\downarrow} b_{\mathbf{q}'\uparrow} + hc \right),$$

con:

$$\begin{array}{ll} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = V, |\xi^1_{\mathbf{k}}| < \omega_D, & V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = 0, |\xi^1_{\mathbf{k}}| \geq \omega_D \\ U_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} = U, |\xi^2_{\mathbf{k}}| < \omega_D, & U_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} = 0, |\xi^2_{\mathbf{k}}| \geq \omega_D \\ J_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} = J, |\xi^1_{\mathbf{k}}|, |\xi^2_{\mathbf{k}}| < \omega_D, & J_{\mathbf{k},\mathbf{q}'} = 0, |\xi^1_{\mathbf{k}}|, |\xi^2_{\mathbf{k}}| \geq \omega_D. \end{array}$$

   (a) Derivar las ecuaciones para el gap.

   (b) Discutir la posibilidad de dos transiciones de fase, considerando que para este compuesto: $U \sim J \sim V/3$.