Estructura de la Materia 2

Curso de Verano de 2014

Guía 8: Magnetismo.

1. Considerar el Hamitoniano para electrones ligados a N átomos de un compuesto de tierras raras en presencia de un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\sum_{l=1}^{N}\left\{\left[\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R}_l)\right]^2 + 2\mu_B B\hat{S}_l^z\right\},$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr y $\hat{S}_l^z$ es el spin total de los electrones en la capa externa de cada átomo.

   (a) Argumentar que si el momento angular orbital de dichos electrones es no nulo, el Hamiltoniano efectivo para describir la respuesta magnética de los electrones de la capa atómica externa de cada átomo es

$$\hat{H}_{at} = \mu_B g \sum_{J_z=-J}^{J} B\hat{J}_z,$$

   donde g es el factor de Landé.

   (b) ¿Qué sucede si $L = S = J = 0$?

   (c) Usar el teorema de Wigner-Eckart para calcular g a partir de los elemento de matriz $\langle JLSJ_z|\hat{\mathbf{L}}+2\hat{\mathbf{S}}|JLSJ_z'\rangle$, siendo J, L, S los números cuánticos correspondientes a los electrones de la capa más externa.

   (d) Derivar la ley de Curie para la susceptibilidad magnética a partir del Hamiltoniano efectivo obtenido en (a). ¿Se trata de una respuesta para o diamagnética?

2. Considerar el modelo de Ising en una red consistente en dos redes interpenetradas 1 y 2 y el Hamiltoniano:

$$H = -J_1\sum_{\langle i1,j1\rangle} S_{i1}^z S_{j1}^z - J_2\sum_{\langle i2,j2\rangle} S_{i2}^z S_{j2}^z - J_3\sum_{\langle i1,j2\rangle} S_{i1}^z S_{j2}^z - B\sum_{i1} S_{i1}^z - B\sum_{i2} S_{i2}^z,$$

siendo $J_1, J_2, J_3 > 0$, las interacciones entre spines primeros vecinos dentro de la subred 1, 2, y entre 1 y 2, respectivamente.

   (a) Plantear la solución de campo medio para este modelo, definiendo dos magnetizaciones m_1 y m_2 correspondientes a cada una de las dos subredes.

   (b) Escribir las ecuaciones de autoconsistencia para m_1 y m_2. En ausencia de campo magnético, ¿es posible que existan dos transiciones de fase en este modelo como función de la temperatura? ¿Por qué?

   (c) Considerando que cerca de la temperatura crítica T_c, m_1 y m_2 son pequeños, intentar encontrar el exponente crítico β a campo magnético externo $B = 0$ a partir de aproximaciones adecuadas.

(d) Discutir en qué limite se recupera el modelo de Ising ferromagnético con interacciones entre primeros vecinos y demostrar que se recuperan las expresiones correspondientes para la magnetización y la susceptibilidad magnética cerca de la temperatura crítica.

3. Considerar el modelo de Ising "cuántico", definido por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z S_j^z - \Gamma \sum_i S_i^x,$$

donde $J > 0$ y S_i^α operadores de spin $1/2$.

   (a) Escribir las ecuaciones de campo medio para este modelo. Graficar esquemáticamente el diagrama de fases en el plano Γ, T y discutir la naturaleza de cada una de las fases.

   (b) Encontrar los valores críticos de Γ para $T = 0$ y de T para $\Gamma = 0$.

4. Considerar al modelo de Heisenberg anisotrópico:

$$H = -\sum_{\langle ij \rangle} \left\{ J^z S_i^z S_j^z + J^\perp \left[S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y \right] \right\},$$

siendo $J^z > J^\perp > 0$.

   (a) Escribir el estado fundamental de este Hamiltoniano y calcular su energía.

   (b) Utilizando la transformación de Holstein-Primakoff para representar a las excitaciones en términos de ondas de espin, mostrar que la magnetización se desvía de su valor de saturación siguiendo una ley exponencial en $-1/T$ a bajas temperaturas, en contraste con el comportamiento $\propto T^{3/2}$ observado en el caso isotrópico.

   (c) Mostrar que en el caso isotrópico, la corrección dominante en la representación de ondas de spin diverge en $2D$, mientras que tal divergencia no tiene lugar en el caso anisotrópico. Interpretar y discutir este resultado.

5. Considerar el Hamiltoniano de Heisenberg antiferromagnético en un dímero:

$$H = J \left[S_1^z S_2^z + S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y \right],$$

con $J > 0$.

   (a) Calcular exactamente las autoenergías y autoestados de este Hamiltoniano. Discutir la naturaleza del estado fundamental y de los excitados. Analizar primero las simetrías de este modelo y aprovecharlas para resolverlo.

   (b) Calcular la función de partición y la susceptibilidad magnética. Discutir el comportamiento de esta última en el límite de altas temperaturas.

   (c) Considerar un dímero del Hamiltoniano de Hubbard con 2 electrones. Calcular el estado fundamental y relacionar dicho estado con el estado fundamental de Hamiltoniano de Heisenberg antiferromagnético.