Estructura de la Materia 2

Primer Cuatrimestre de 2015

Guía 7: Superconductividad. Teorías Fenomenológicas y BCS.

1.

   a) Mostrar que $f_n(T,0) - f_s(T,0) = [H_c(T)]^2/(8\pi)$, siendo f_n, f_s las energías libres de las fases normal y superconductora, respectivamente.

   b) Sobre la base de la teoría de Ginzburg–Landau, analizar el comportamiento de $H_c(T)$ cerca de T_c.

   c) Mostrar que la diferencia de calor específico entre el estado normal y el superconductor puede expresarse: $c_n - c_s = [H_c(0)]^2 \left(t - 3t^3\right)/2\pi T_c$, donde $t = T/T_c$.

2.

   a) Mostrar que de la teoría de Ginzburg–Landau se predice la ecuación de London para la corriente superconductora, indentificando $|\psi|^2 = n_s$, siendo n_s la densidad de "portadores superconductores".

   b) Teniendo en cuenta la teoría microscópica, ¿cuál sería la relación que vincula la carga efectiva e^* del funcional de Ginzburg–Landau y la carga e de un electrón?

3. Derivar y resolver las ecuaciones de Ginzburg–Landau para una interfase superconductor-normal. Suponer que la interfase es el plano $x = 0$.

4. Teoría BCS

   a) Probar que la función de onda del estado fundamental de la teoría BCS:

   $$|\Phi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} [1 + g_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow}] \, |0\rangle \, ,$$

   puede escribirse alternativamente como un estado coherente:

   $$|\Phi\rangle = \exp\left[\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k},\downarrow}\right] |0\rangle \, .$$

   b) Probar las siguientes expresiones:

   $$\begin{aligned}
   \langle\Phi|\Phi\rangle &= \prod_{\mathbf{k}} \left[1 + |g_{\mathbf{k}}|^2\right] = N^2 \\
   b_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{N^2} \langle\Phi| c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} |\Phi\rangle = \frac{g_{\mathbf{k}}}{1 + |g_{\mathbf{k}}|^2} \\
   b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} &= \frac{1}{N^2} \langle\Phi| \, c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} c^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \, |\Phi\rangle \\
   \sum_{\sigma} n_{\mathbf{k}\sigma} &= g_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}} + g_{-\mathbf{k}} b^*_{-\mathbf{k}}.
   \end{aligned}$$

c) Mostrar que los valores de $b_{\mathbf{k}}$ que minimizan la energía del estado fundamental del Hamiltonano BCS satisfacen

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{g_{\mathbf{k}}}{1 + |g_{\mathbf{k}}|^2},$$

y encontrar una expresión para $g_{\mathbf{k}}$ en función de los parámetros del Hamiltoniano. Identificar la función del gap $\Delta_{\mathbf{k}}$ y notar que debe calcularse de manera autoconsistente.

d) Escribir la ecuación autoconsistente para $\Delta_{\mathbf{k}}$ y evaluar este parámetro en el caso de una densidad de estados constante.

5. Considerar el Hamiltoniano BCS.

   a) Mostrar que los operadores de Bogoliubov $\gamma_{\mathbf{k},\alpha}, \gamma^{\dagger}_{\mathbf{k},\alpha}$ satisfacen reglas de conmutación fermiónicas.

   b) Calcular la ecuación del gap y obtener una expresión para la temperatura crítica en el caso de una densidad de estados contante.

   c) Calcular el calor específico y analizar el comportamiento a bajas temperaturas. Comparar con el comportamiento a $T > T_c$.