Estructura de la Materia 2

Primer Cuatrimestre 2018

Guía 7: Apantallamiento y Líquidos de Fermi

1.

a) A partir de la representación integral de la función delta,

$$\delta(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

y del hecho que el potencial de Coulomb $\phi(\mathbf{r}) = -e/r$ satisface la ecuación de Poisson,

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -4\pi e\delta(\mathbf{r})$$

muestre que el potencial electrón–electrón, $V(\mathbf{r}) = -e\phi(\mathbf{r}) = e^2/r$ se puede escribir en la forma

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{k})$$

donde la transformada de Fourier $V(\mathbf{k})$ esta dada por

$$V(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{k^2}.$$

b) Muestre que la transformada de Fourier de la interacción de Coulomb apantallada $V_s(\mathbf{r}) = (e^2/r)e^{-k_{TF}r}$ es

$$V_s(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{k^2 + k_{TF}^2}.$$

c) A partir de lo hallado en *b)* deduzca la ecuación de Poisson para $V_s(\mathbf{r})$:

$$\left(-\nabla^2 + k_{TF}^2\right) V_s(\mathbf{r}) = 4\pi e^2\delta(\mathbf{r}).$$

2. Considere la función de Lindhard en d–dimensiones en el caso estático ($\omega = 0$):

$$\chi_0(\mathbf{q}) = -2\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{n_\mathbf{k} - n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_\mathbf{k}} = -2\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \left(\frac{n_\mathbf{k}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_\mathbf{k}} - \frac{n_\mathbf{k}}{\varepsilon_\mathbf{k} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \right)$$

donde $n_\mathbf{k}$ es la función de Fermi y $\varepsilon_\mathbf{k}$ es la relación de dispersión del gas de electrones.

a) Muestre que, definiendo la variable $k \to k/k_F$ se obtiene:

$$\chi_0(\mathbf{q}) = -\frac{2k_F^d}{\varepsilon_F} \int_{k\leq 1} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{2q^2}{q^4 - 4\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\right)^2}.$$

b) Analice el caso $d = 2$ y obtenga:

$$\chi_0(q) = -\frac{n}{\varepsilon_F}\left[1 - \Theta(q-2)\sqrt{1-(2/q)^2}\right]$$

donde $n = k_F^2/(2\pi)$.

c) Discuta el comportamiento en $q = 2$.

3. Derive la frecuencia de plasma $\omega_p = \sqrt{ne^2/m}$ siguiendo un argumento puramente clásico. Considere un gas de electrones de densidad n en una caja de lados L_x, L_y y L_z con $L_x \ll L_y, L_z$. Un fondo inerte de iones garantiza la neutralidad de carga del sistema. Imagine que el gas de electrones se desplaza una distancia pequeña ξ en la dirección $\hat{x}$ ($\xi \ll L_x$), dejando los iones fijos. En un dado momento se deja evolucionar al gas libremente.
Encuentre la ecuación de movimiento para la coordenada ξ usando las leyes de Newton y electrostática clásica. Interprete.

4. La definición del índice de refracción es:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon}$$

donde c es la velocidad de la luz en vacío y v en un medio material, con ε (ε_0) la permitividad del medio (vacío) y ε la constante dieléctrica. La aproximación hecha es válida para medios no magnéticos.
Usando para ε el modelo de RPA en la aproximación de onda larga y alta frecuencia:

$$\varepsilon(\mathbf{q},\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}$$

analice cualitativamente el comportamiento de una onda electromagnética cuando esta incide en un metal.

5. Considere el Hamiltoniano del oscilador armónico y suponga que la constante de fuerza depende del tiempo $k = k_0 e^{\eta t}$:

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k(t)\hat{x}^2.$$

Suponga además que a $t = 0$ el sistema esta en el estado fundamental de $H(0)$.

a) Para valores pequeños de η la aproximación adiabática garantiza que el sistema permanece aproximadamente en el estado fundamental a tiempos posteriores. ¿Cuán pequeño debe ser η para que dicha afirmación sea verdadera?

b) Suponiendo que la aproximación adiabática es cierta, calcule las fases dinámicas y geométricas a tiempo t. Discuta qué pasa con el término $\langle 0|\dot{0}\rangle$. Analice qué relación tene con el hecho de que el Hamiltoniano sea real.

Ayuda: para los autoestados del oscilador armónico $|n\rangle$, vale la relación:$\langle m|x^2|n\rangle \neq 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant m-n$. Además, $\langle 0|x^2|0\rangle = 1/2\alpha$; $\langle 1|x^2|0\rangle = 0$ y $\langle 2|x^2|0\rangle = 1/\sqrt{2}\alpha$ con $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$.

6. A partir de la funcional de Landau:

$$\delta E\left[\delta n_{\mathbf{k}}\right] = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon^{(0)}_{\mathbf{k}\sigma}\delta n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\sum_{\sigma,\sigma'} \delta n_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta n_{\mathbf{k}'}$$

con $\varepsilon^{(0)}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}$:

a) Construya la función de partición gran canónico Z.

b) Aproximando las oupaciones por sus valores medios $\delta n_{\mathbf{k}} = \langle\delta n_{\mathbf{k}}\rangle + (\delta n_{\mathbf{k}} - \langle\delta n_{\mathbf{k}}\rangle)$ y expandiendo la energía libre a primer orden en el término entre parentesis, muestre que la estadística de las cuasi-partíclas es fermiónica, *i.e.* que

$$\langle\delta n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma}-\mu)}+1} - \left\langle n^{(0)}_{\mathbf{k}}\right\rangle$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} = \varepsilon^0_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} f_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta n_{\mathbf{k}'}$ es la energía de las cuasi-partículas y $\left\langle n^{(0)}_{\mathbf{k}}\right\rangle$ las distribución de Fermi.

7. Obtenga la masa efectiva y el calor específico del líquido de Fermi utilizando la funcional definida en el ejercicio anterior.