Estructura de la Materia 4 (2c/12)
Práctica 4: SU(2), SU(3) y modelo de quarks

1. (a) Mostrar que el conjunto de todas las matrices unitarias de $n \times n$ forman un grupo.
   (b) Mostrar que las matrices unitarias de $n \times n$ con determinante 1 forman un grupo.
   (c) Mostrar que $O(n)$ es un grupo.
   (d) Mostrar que $SO(n)$ es un grupo.

2. Mostrar que todo elemento de $SU(2)$ se puede escribir como

$$U(\vec{\theta}) = \cos\frac{\theta}{2} - i\,\hat{\theta}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}\ . \tag{1}$$

3. Una transformación SU(3) arbitraria se puede escribir como

$$\Psi'(x) = U(\epsilon^a)\,\Psi(x) = e^{i\,\epsilon^a\frac{\lambda_a}{2}}\,\Psi(x) \quad a = 1,\ldots,8$$

donde ϵ^a son ocho parámetros reales que caracterizan la transformación, y λ_a son el análogo de las matrices de Pauli pero para SU(3):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que λ_1, λ_2, y λ_3, generan rotaciones en el espacio de isospín.
b) Verifique que $I_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$, $U_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$, y $V_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ son los operadores de subida y de bajada para isospín, u-espín, y v-espín.
c) Muestre que los generadores λ_a satisfacen relaciones análogas a las de las matrices de Pauli de SU(2)

$SU(2)$	$SU(3)$
$tr\,\sigma_i = 0$	$tr\,\lambda_a = 0$
$tr\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij}$	$tr\,\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$
$[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\,\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$	$[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i\,f_{abc}\frac{\lambda_c}{2}$

donde las constantes de estructura f_{abc} son antisimétricas ante el intercambio de pares de índices ($f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$)

4. Usando las funciones de onda de sabor y espín simétrica, muestre que la probabilidad de hallar un quark u en un protón con el espín orientado en la dirección del espín del protón es 5/9, mientras que la de hallarlo con el espín orientado en la dirección opuesta es 1/9. Repita el cálculo para un quark d. Indique qué se puede decir respecto de la polarización de los quarks en un neutrón.

5. Muestre que con las funciones de onda de protón y neutrón totalmente antisimétricas se predice $\mu_n/\mu_p = -2$, y que el momento magnético del protón es negativo, en total contradicción con los resultados experimentales, mientras que con las simétricas se obtienen los valores correctos.

6. Generalizando la simetría SU(2) a SU(3), obtenga las funciones de onda del octete simétrico utilizando los operadores de subida y bajada. Discuta la existencia de las partículas Σ^0 y Λ^0, que corresponden a un mismo octete, y tienen los mismos valores de extrañeza S=-1 y componente de isospín I_3=0. ¿En qué se diferencian entonces? ¿Cómo reflejan sus respectivas funciones de onda de SU(3) esta diferencia?

7. A partir de las funciones de onda del Λ en las representaciones $\mathbf{8_A}$ y $\mathbf{8_S}$: $\Lambda_\mathbf{A} = 1/\sqrt{12}$ $[2(ud-du)s+(us-su)d+(sd-ds)u]$ y $\Lambda_\mathbf{S} = \frac{1}{2}$ $[-(us+su)d+(ds+sd)u]$.

   a) Combine éstas con las funciones de espín adecuadas para obtener la función de onda SU(6) completamente simétrica del Λ.

   b) Calcule el momento magnético del Λ (m_u=m_d=360 MeV, m_s=540 MeV).

   c) ¿Quién lleva el espín del Λ? Para ello calcule cuál es la probabilidad que, al tomar un quark al azar de un Λ con espín up, se obtenga un $u^\uparrow, u^\downarrow, d^\uparrow, d^\downarrow, s^\uparrow$ ó un $s^\downarrow$.

8. Considere los decaimientos a e^-e^+ de los mesones vectoriales, $J^{PC} = 1^{--}$. Suponiendo que proceden vía la formación de un fotón virtual, las amplitudes de decaimiento serán proporcionales a las cargas de los quarks. Muestre que para $\Gamma(V \to e^-e^+)$ se predice la relación $\rho^0 : \omega : \phi : J/\psi : \Upsilon = 9 : 1 : 2 : 8 : 2$. Para la composición del ϕ tome $s\bar{s}$, mientras que para las del ρ^0 y ω, ambos compuestos de $u\bar{u}$ y $d\bar{d}$, tenga en cuenta que el ρ^0 forma un triplete de isospín, junto a ρ^+ y ρ^-, mientras que el ω es un singlete. Compare la predicción teórica con los resultados experimentales extraídos de la Tabla de Partículas. Note que se verifica no sólo la composición de los mesones, sino también las asignaciones de cargas de los quarks.