

## Estructura de la Materia 4 (2c/12)

### Práctica 7: Invariancia de Gauge

1. a) Muestre que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre no es invariante ante transformaciones de fase locales

$$\Psi(\vec{x}, t) \longrightarrow e^{-i\chi(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t)$$

- b) Muestre que la ecuación de Schrödinger para una partícula con carga eléctrica  $e$  en presencia de un campo electromagnético

$$\frac{1}{2m} \left( -i\nabla + e\vec{A} \right)^2 \Psi = \left( i\frac{\partial}{\partial t} + eV \right) \Psi$$

es invariante bajo las siguientes transformaciones simultáneas

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(\vec{x}, t) \longrightarrow e^{-i\chi(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) \\ \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \frac{1}{e}\vec{\nabla}\chi \\ V \longrightarrow V - \frac{1}{e}\frac{\partial\chi}{\partial t} \end{array} \right.$$

2. a) Muestre que el lagrangiano de Klein-Gordon libre  $\mathcal{L}_{KG}$  es invariante ante transformaciones globales del grupo  $U(1)$  y encuentre la corriente de Noether conservada.

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi$$

- b) Encuentre los acoplamientos de ‘QED escalar’ reemplazando en  $\mathcal{L}_{KG}$  la derivada  $\partial_\mu$  por la derivada covariante  $D_\mu$  de modo que  $\mathcal{L}_{KG}$  sea invariante de gauge  $U(1)$  local.  
 c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción obtenidos

3. Verifique que el lagrangiano de interacción de una partícula de Dirac con el campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) + q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

es invariante ante una transformación de medida local

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) \rightarrow e^{iq\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \end{array} \right.$$

Encuentre la corriente de Noether conservada asociada a la simetría  $U(1)$  global.

4. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}_G = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

donde  $\Phi$  es un doblete de  $SU(2)$  de campos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que  $\mathcal{L}_G$  is invariante ante transformaciones de fase globales del grupo  $SU(2)$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} \Phi(x)$$

y encuentre la corriente de Noether conservada.

b) Muestre que el lagrangiano  $\mathcal{L}_L$

$$\mathcal{L}_L = \left( \partial_\mu \Phi + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \Phi \right)^\dagger \left( \partial^\mu \Phi + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \Phi \right) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}$$

que resulta de la sustitución de  $\partial_\mu$  por la derivada covariante  $D_\mu$  en  $\mathcal{L}_L$  con

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu$$

donde  $\vec{W}_\mu(x)$  es un campo de gauge de tres componentes, y del agregado de un término de ‘gauge puro’ en función del tensor

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \quad (1)$$

es invariante ante transformaciones infinitesimales

$$\begin{cases} \Phi(x) \rightarrow (1 + i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}) \Phi(x) & (2) \\ \vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu & (3) \end{cases}$$

c) Explique porqué los últimos términos de las ecuaciones (1) y (3) están vinculados al carácter no abeliano de  $SU(2)$ .