

## ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

### PRIMER CUATRIMESTRE DE 2014

#### PRÁCTICA 5: FORMULACIÓN LAGRANGIANA

1. Halle e identifique las ecuaciones de movimiento para el campo  $\psi(x)$  que se derivan de la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\psi, \vec{\nabla}\psi, \dot{\psi}) = i\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi - V(\vec{x}, t) \psi^* \psi.$$

2. Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

- (a) Halle las simetrías del problema, diga que grupo forman.  
(b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables parte real e imaginaria de  $\phi$   
(c) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables  $\phi$  y  $\phi^*$ .
3. Confeccione un lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange devengan en la siguiente ecuación de movimiento

$$\partial^\mu \partial_\mu \theta(\vec{x}, t) = 2\lambda e^{2\theta(\vec{x}, t)},$$

siendo  $\lambda$  un parámetro constante de la teoría.

4. Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - V(\varphi, \phi)$$

donde  $V(\varphi, \phi)$  es una función de los módulos de ambos campos, y donde  $m$  representa un parámetro constante de la teoría.

- (a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos (y complejos!) en esta teoría.  
(b) Calcular los momentos canónico conjugados al campo  $\phi$  y al campo  $\varphi$ .  
(c) Hallar las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga que grupo forman. ¿Qué se debería cumplir para que el grupo de simetría sea  $U(2)$ ?  
(d) Si se hace, en este lagrangiano, el reemplazo  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$ , ¿cuál sería el nuevo momento canónico conjugado al campo  $\phi$ ?
5. Considere la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda A^\mu A_\mu);$$

siendo, según la convención standard,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , y donde  $\lambda$  representa un parámetro constante de la teoría.

- (a) Derivar las ecuaciones de movimiento provenientes de esta acción.
- (b) Muestre que, para  $\lambda = 0$ , existe una elección de gauge tal que estas ecuaciones pueden escribirse como  $\partial^\rho \partial_\rho A^\nu = 0$ .
- (c) Decir si reconoce, en el caso  $\lambda = 0$ , alguna teoría de campos familiar en tales ecuaciones de movimiento. En tal caso, identifíquela.
- (d) ¿A qué magnitud física asociaría usted el valor de la constante  $\lambda$ ?
- (e) Para el caso  $\lambda = 0$ , escriba la acción en función de los campos eléctrico y magnético ( $E$  y  $B$  respectivamente), y relacione estas cantidades con las cantidades  $T$  y  $V$  (energía cinética y energía potencial, respectivamente) de la mecánica clásica. A fin de obtener una interpretación física de esta analogía, piense cómo se escribe la energía electromagnética en términos de los campos  $E$  y  $B$ .

6. Considere el lagrangiano de Dirac acoplado a la lagrangiana de Maxwell; es decir

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

siendo  $D_\mu$  la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ .

- (a) Escriba este lagrangiano aislando la parte del fermión libre, la del campo electromagnético, y la de interacción.
- (b) Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.
- (c) Halle todas las simetrías de este Lagrangiano.
- (d) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría de campos.

7. Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_3)\psi_3(x)$$

- (a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este Lagrangiano?
- (b) Y si fuesen las tres masas iguales ( $m_1 = m_2 = m_3$ ), ¿cuál sería el grupo de simetrías en este caso? ¿A qué le hace acordar...?