

Estructura de la Materia 4

Práctica 5: Ecuación de Dirac.

1. a) Verifique que las matrices $\vec{\alpha}_i$ y β dadas por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli e I es la identidad en dos dimensiones, satisfacen los requerimientos de la ecuación de Dirac; es decir, son hermíticas, de traza nula y autovalores ± 1 , y además satisfacen el álgebra de Dirac:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &\equiv \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} & \alpha_i^2 &= 1 \\ \{\alpha_i, \beta\} &\equiv \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 & \beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

- b) Muestre que $\beta' \equiv \alpha_2$, $\alpha'_1 \equiv -\alpha_1$, $\alpha'_2 \equiv \beta$ y $\alpha'_3 \equiv -\alpha_3$, satisfacen el álgebra de Dirac.
c) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{Dirac} = 0$$

mostrando que $\rho_{Dirac} = \Psi^\dagger \Psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi$.

- d) Muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta \alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

2. Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital \vec{L} , pero si lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con \vec{S} dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Muestre que el operador \vec{S} definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm \frac{\hbar}{2}$.

3. La ecuación de Dirac para una partícula libre tiene dos soluciones linealmente independientes asociadas al mismo valor de energía-impulso (\vec{p} y E):

$$\Psi(x, t) = u_i(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x} - \frac{i}{\hbar} E t} \quad (i = 1, 2)$$

con

$$u_i(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi_i \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \chi_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

en el caso $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} > 0$, y

$$\Psi(x, t) = u_i(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x} + \frac{i}{\hbar}|E|t} \quad (i = 3, 4)$$

con

$$u_i(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{-c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|E|+mc^2} \chi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} \quad (i = 3, 4)$$

en el caso $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} < 0$, donde N es una constante de normalización, y

$$\chi_1 = \chi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_2 = \chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) Verifique explícitamente que son soluciones.

ii) Verifique que para $\vec{p} = 0$ se recuperan las soluciones en reposo.

iii) Determine el valor de N que define la normalización covariante $u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}|E|/mc^2$.

Discuta el uso de esta normalización que involucra a la energía en lugar de $u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}$

iv) Muestre que el operador de helicidad $\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \cdot \hat{P}$ (con $\hat{P} \equiv \vec{P}/|\vec{P}|$), proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso \vec{P} , de forma tal que se lo puede agregar a éstos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

v) Verifique que para $\vec{p} = (0, 0, p)$, los espinores $u_1(\vec{p})$ y $u_2(\vec{p})$ son autoestados del operador de helicidad con autovalores $\pm \frac{\hbar}{2}$

4. **a)** Muestre que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices γ de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

b) Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u_i(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u_i(\vec{p}) = (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) u_i(\vec{p}) \quad (i = 1, 2)$$

c) Verifique que para las antipartículas quiralidad y helicidad son opuestas

$$\gamma^5 u_i(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) u_i(\vec{p}) \quad (i = 3, 4)$$

5. Vuelva a obtener las soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre de energía E e impulso \vec{p} a partir de las soluciones en reposo haciendo una transformación de Lorentz.

6. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ que transforma al espinor Ψ según $\Psi \rightarrow \Psi' = S_\Lambda \Psi$ donde $S_\Lambda^{-1} \gamma^\nu S_\Lambda = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu$. Sabiendo que para una transformación infinitesimal $\Lambda^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu_\mu$ para el operador S se obtiene $S = 1 + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \varepsilon^{\mu\nu}$ muestre que

(a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

(b) $\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} S^{-1}$ con $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

(c) $\bar{\Psi} \Psi$ es invariante Lorentz

(d) $j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ es un cuadrivector

(e) $j^5 = \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi$ es un pseudoescalar dado que $[S, \gamma^5] = 0$ para rotaciones y boosts y $S_P = \gamma^0$ es solución de $S_P^{-1} \gamma^\nu S_P = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu$ cuando Λ corresponde a una inversión de coordenadas ($t \rightarrow t, x \rightarrow -x$).

7. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en límite no relativista ($E \approx mc^2$) las componentes inferiores (o *débiles*) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o *fuertes*), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

8. A partir de la sustitución $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ y $E \rightarrow \epsilon_{NR} + mc^2 - q\Phi$ en la ecuación de Dirac, muestre que en el límite no relativista $\epsilon_{NR} - q\Phi \ll mc^2$, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli

$$\left(\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\Phi - \frac{q\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \Psi = \epsilon_{NR} \Psi$$

9. Analice el problema de la transmisión y reflexión de una partícula de Dirac de energía E ante un escalón de potencial V_0 . Muestre que el coeficiente de reflexión puede ser mayor que la unidad en el caso que $V_0 > E + mc^2$, y que en tal situación el coeficiente de transmisión es negativo. Cómo se interpreta esto?