Estructura de la Materia 4
Práctica 7: Invariancia de Gauge

1. **a)** Muestre que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre no es invariante ante transformaciones de fase locales

$$\Psi(\vec{x},t) \longrightarrow e^{-i\chi(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t)$$

b) Muestre que la ecuación de Schrödinger para una partícula con carga eléctrica e en presencia de un campo electromagnético

$$\frac{1}{2m}\left(-i\nabla + e\vec{A}\right)^2\Psi = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + eV\right)\Psi$$

es invariante bajo las siguientes transformaciones simultáneas

$$\begin{cases} \Psi(\vec{x},t) \longrightarrow e^{-i\chi(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t) \\ \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \frac{1}{e}\vec{\nabla}\chi \\ V \longrightarrow V - \frac{1}{e}\frac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases}$$

2. **a)** Muestre que el lagrangiano de Klein-Gordon libre $\mathcal{L}_{KG}$ es invariante ante transformaciones globales del grupo $U(1)$ y encuentre la corriente de Noether conservada.

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi$$

b) Encuentre los acoplamientos de 'QED escalar' reemplazando en $\mathcal{L}_{KG}$ la derivada ∂_μ por la derivada covariante D_μ de modo que $\mathcal{L}_{KG}$ sea invariante de gauge $U(1)$ local.
c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción obtenidos

3. Verifique que el lagrangiano de interacción de una partícula de Dirac con el campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) + q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

es invariante ante una transformación de medida local

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{i\,q\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \end{cases}$$

Encuentre la corriente de Noether conservada asociada a la simetría $U(1)$ global.

4. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}_G = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

donde Φ es un doblete de SU(2) de campos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que $\mathcal{L}_G$ is invariante ante transformaciones de fase globales del grupo $SU(2)$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}} \Phi(x)$$

y encuentre la corriente de Noether conservada.

b) Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}_L$

$$\mathcal{L}_L = \left(\partial_\mu \Phi + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \Phi\right) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}$$

que resulta de la sustitución de ∂_μ por la derivada covariante D_μ en $\mathcal{L}_L$ con

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu$$

donde $\vec{W}_\mu(x)$ es un campo de gauge de tres componentes, y del agregado de un término de 'gauge puro' en función del tensor

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \tag{1}$$

es invariante ante transformaciones infinitesimales

$$\begin{cases} \Phi(x) \to (1 + i\,\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2})\, \Phi(x) & (2) \\ \vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu & (3) \end{cases}$$

c) Explique porqué los últimos términos de las ecuaciones (1) y (3) están vinculados al caracter no abeliano de SU(2).