Resolución (más sermón) del ejercicio 1 del segundo parcial

Considere la densidad Lagrangiana de tres campos de Dirac Ψ_j $(j = 1, 2, 3)$:

$$L = \sum_{j=1}^{3} \bar{\Psi}_j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j)\Psi_j$$

siendo las m_i no necesariamente iguales.

1. Halle el grupo de simetrías de este Lagrangiano
2. Para el caso especial en que $m_1 = m_2$, halle el grupo de simetrías. Muestre que en este caso la siguiente tranformación

$$\Psi_1 \to a\Psi_1 + b\Psi_2 \qquad \Psi_2 \to -e^{i\theta} b^* \Psi_1 + e^{i\theta} a^* \Psi_2 \quad \Psi_3 \to e^{i\beta}\Psi_3,$$

   con a, b números complejos tales que $aa^* + bb^* = 1$ y θ, β reales, es una simetría del Lagrangiano.
3. Proponga una modificación al Lagrangiano anterior (en el caso especial $m_1 = m_2$) para que este tenga una simetría $SU(2)$ local. Escriba explícitamente todos los términos del Lagrangiano.

Resolución:

1. En el caso generico en que las masas son distintas, el Lagrangiano es invariante ante las transformaciones $\Psi_1 \to e^{i\alpha_1}\Psi_1$, $\Psi_2 \to e^{i\alpha_2}\Psi_2$, $\Psi_3 \to e^{i\alpha_3}\Psi_3$, con α_i real e *independiente* para cada i. El grupo de simetrías es entonces $U(1) \times U(1) \times U(1)$
2. En este caso especial el grupo de simetrías es mas grande. Dado que $m_1 = m_2 \equiv m$, los primeros dos términos del lagrangiano pueden escribirse como $\bar{\Phi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Phi$, siendo Φ *un doblete de espinores* $\Phi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$.

   Al estar escrito de esta forma, por lo discutido en la Guia 5, es evidente que será simetria una transformación que mezcle los espinores del doblete de la siguiente forma: $\Phi \to M\Phi$, con M una matriz de 2×2 de coeficientes constantes que cumple: $M^\dagger = M^{-1}$. Este grupo de matrices es denomeninado $U(2)$ (matrices unitarias de 2×2. Dado que ademas sigue siendo simetría hacer $\Psi_3 \to e^{i\alpha_3}\Psi_3$, el grupo de simetrías de este caso es $U(2) \times U(1)$.

   Para la segunda parte de este item basta ver que la trasnformación propuesta cae dentro de $U(2) \times U(1)$ [1]. Es decir, basta ver que la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta} b^* & e^{i\theta} a^* \end{pmatrix}$, cumple la condición $MM^\dagger = 1$. Esto se verifica facilmente usando las relaciones entre a y b.
3. La modificación en el Lagrangiano consiste en *dos pasos*:

[1] de hecho, es la forma mas general de esa transformación. Esto no tienen porque saberlo

- Sustituir en los términos correspondientes al doblete la derivada ordinaria por una derivada covariante $D_\mu = \partial_u + igW_\mu^a T_a$, siendo los T_a generadores del algebra de $SU(2)$
- Agregar un término de la forma $F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a$ siendo $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ y f_{abc} las constantes de estructura del algebra.

Mas explicitamente, los generadores T_a son las matrices de Pauli sobre dos $T_a \equiv \frac{\sigma_a}{2}$. De modo que el Lagrangiano completo modificado puede escribirse como:

$$L = \bar{\Phi}(i(\gamma^\mu \partial_\mu + igW^a \frac{\sigma_a}{2}) - m)\Phi + \bar{\Psi}_3(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_3)\Psi_3 - \frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a$$

Algunos errores encontrados en la corrección (los nombres han sido cambiados)

Ante todo es importante recalcar la importancia de los temas que aparecen en este problema. En este ejemplo sencillo (muy similar a un ejercicio de la guia 5..casi identico) aparecen las estructuras de grupos de simetría (globales y locales) del modelos estandar y el fenomeno por el cual la igualdad de algunas masas conlleva un aumento en la simetría. Ademas, aparecen los campos de guage asociadas a un grupo de simetría no Abeliano.

- Más alla de saber como se nombran los grupos, lo importante en el item 1 era darse cuenta de que hay tres transformaciones independientes. No es correcto decir que el grupo de simetría esta dada por la transformación $\Psi_i \to e^{i\alpha}\Psi_i$, siendo α el mismo para los tres espinores, dado que se queda corta la afirmación. Esto seria decir que el grupo es $U(1)$ y no $U(1) \times U(1) \times U(1)$.

- En el item 2, si notaban que el grupo se ampliaba a $U(2) \times U(1)$ (no $SU(2) \times U(1)$). Ver siguiente item), la verificación de que la transformación propuesta era simetría se volvia trivial. Muchos no se dieron cuenta de ello y lo verificaron por sustitución directa. Obviamente, no se bajo puntos por eso. Ya bastante castigo fue haber perdido tiempo en hacer esa cuenta.

- Un error común fue decir que el grupo de simetría en este caso era en este caso $SU(2) \times U(1)$ y no lo correscto que es $U(2) \times U(1)$. Si se tiene en cuenta lo que significa la S en $SU(2)$ no se habria caido en este error, dado que tenian ante las narices la evidencia de que las transformaciones tenian asociadas una matriz con determinante distinto de 1. Recuerden que la S en $SU(2)$ denota determinante igual a 1 (y no modulo del determinante igual a 1) y la trasnformación propuesta no verificaba esa condición (su determinante daba una fase $e^{i\alpha}$). No se bajo casi nada por este error.

  Pero es importante aclarar que decir que el grupo de simetrás es $SU(2) \times U(1)$, con plena consciencia de lo que significa cada expresión, implicaría la conclusión absurda de que la transformación de simetría del item anterior (para el caso generico de masas distintas) no sería simetría en este caso especial. Porque acababan de decir en el item 1 que la transformación de simetría consistia en multiplicar al triplete de campos por una matriz diagonal

$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}$ con fases en casa entrada. El determinante del bloque de 2×2 no es 1.

- En el item 3 es donde se dieron los errores mas graves. El principal es *no haber agregado el término que da dinamica a los campos de gauge.* Haber introducido el campo en la derivada covariante sin agregar el término F^2 implicaría que los campos de gauge son campos externos sin ninguna restricción. Esto es completamente ajeno a la idea de introducir interacciones de gauge promoviendo una simetría global a local. Por favor revisen ese punto si no quieren pasar un mal momento en el final!

  A pesar de la gravedad del error, no se bajo mucho puntaje dado el caracter masivo de esa omisión.

- Otro error grave (este si es heavy) tiene que ver con introducir matrices sin saber donde operan estas. Hay quienes sustituyeron la derivada común por derivada covariante en cada término por separado, correspondiente a los espinores 1 y 2. De esa forma, algunos llegaron a una expresión sin sentido como esta: $\bar{\Psi}_1 i(\gamma^\mu \partial_\mu + igW^a \frac{\sigma_a}{2})\Psi_1$ (????). Las matrices de Pauli (generadores del algebra $su(2)$) lo que hacen es mezclar los espinores 1 y 2. Por eso es necesario agrupar a estos en un vector de dos componentes (el doblete Φ) y actuar en ese espacio. La expresión con sentido es esta: $\bar{\Phi} i(\gamma^\mu \partial_\mu + igW^a \frac{\sigma_a}{2})\Phi$.

- Y quiza el mas grave de todos es escribir en la derivada covariante del Lagrangiano modificado el parametro de la transformación de gauge. No fueron muchos los que cometieron esta atrocidad. Se entiende porque es tan grave? Que puede querer decir que un término de un lagrangiano contiene como campo el parametro de una transformación de simetría?. Seria como introducir en el Lagrangiano de una partícula libre el parámetro de una rotación.