Estructura de la materia 4

Primer Cuatrimestre de 2015

Práctica 4: Ecuación de Dirac

1. A partir de la definición de las densidades y corrientes de probabilidad $\rho(x,t)$ y $\vec{J}(x,t)$ en términos de las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon, demuestre la validez de la ecuación de continuidad $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ en ambos casos.

2. Dadas las matrices

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

(Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac.). Escriba explicitamete algunas de esas relaciones para entender lo que significan.

3. Sea la ecuación de Dirac escrita en forma covariante,

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) = 0.$$

   (a) Halle las 4 soluciones en reposo linealmente indepedientes:

$$u^{(1)}(m,\vec{0}),\ u^{(2)}(m,\vec{0}),\ u^{(3)}(m,\vec{0}),\ u^{(4)}(m,\vec{0})$$

   junto a sus respectivas dependencias temporales. Piense qué quiere decir energía positiva o negativa.

   (b) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J}_{Dirac} = 0$$

   mostrando que $\rho_{Dirac} = \psi^\dagger\psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$.

   (c) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,

$$H\psi = i\partial_t\psi.$$

4. Momento angular total:

   (a) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$, pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

   con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

(b) Muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm\hbar/2$ en unidades anti-naturales).

(c) Verifique este operador satisface el valor de J^2 esperado para una partícula de espín $1/2$.

5. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

6. A partir de la sustitución $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$ y $E \to \varepsilon_{NR} + m - q\Phi$ en la ecuación de Dirac muestre que, en el límite no relativista y de campos débiles, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi - g\frac{q}{2m}\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{B} \right) \psi = \varepsilon_{NR}\psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón que, si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

7. El espinor de Dirac transforma de una manera caracteristica ante transformaciones del grupo de Lorentz (es decir, rotaciones y boost. Esta esta dada por una matriz S que se obtiene exponenciando los generadores $\Sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ (La transformación del espinor se obtiene mediante $S_\Lambda \equiv e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}$, donde $\omega_{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación de Lorentz)

(a) Halle la expresión explícita de estos para el caso de una rotación en torno a un eje generico.

(b) Idem para el caso de un boost.

8. Para hallar las soluciones de la ecuación de Dirac con momento $\vec{p} \neq 0$ se puede aplicar un boost sobre la soluciones en reposo ($\vec{p} = 0$). Se puede ver que las soluciones de energía positiva/negativa son proporcionales a $(\gamma^\mu k_\mu + m)\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik^\nu x_\nu}$ y $(-\gamma^\mu k_\mu + m)\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} e^{ik^\nu x_\nu}$ respectivamente.

(a) Verifique que ambas son soluciones de la ecuación de Dirac.

(b) Verique que la parte inferior (superior) de las componentes del espinor tiende a cero para momentos bajos.

9. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \to x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor ψ según $\psi \to \psi' = S_\Lambda \psi$ sienso S la matriz definida previamente. Tomando por valida la igualdad $S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ (ver referencias para esto), muestre que

(a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

(b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

(c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.

(d) $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector.

(e) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar.

(f) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ es un pseudo-cuadrivector.

10. Muestre que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

11. Muestre que el operador de helicidad $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}.\hat{P}$ con $(\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|)$, que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$, de forma tal que se lo puede agregar a estos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

12. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = (\vec{\Sigma}.\hat{p})u(\vec{p}).$$

Por otro lado, verifique que para las antipartículas, quiralidad y helicidad son opuestas

$$\gamma^5 v(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma}.\hat{p})v(\vec{p}).$$

13. Partiendo de la definición de los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, demuestre las siguientes propiedades

que son proyectores	$P_\pm^2$	$=$	$P_\pm$
sobre espacios disjuntos	P_+P_-	$=$	0
complementarios	$P_+ + P_-$	$=$	1
y que corresponden a la quiralidad *Right* y *Left*	$\gamma^5 P_\pm \psi$	$=$	$\pm\psi$

14. Además de la representación de Dirac para las matrices γ, existe la representación de Weyl (o quiral),

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Muestre que estas matrices también cumplen con la condición $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

(b) Muestre que en en esta representación la función de onda se puede escribir $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, donde $\psi_L = P_L\psi$ representa la parte de quiralidad *left* y $\psi_R = P_R\psi$ la parte de quiralidad *right* de la función de onda.

(c) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R