ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2017

PRÁCTICA 6A: TEORÍAS DE GAUGE (ABELIANO)

1. Considere la acción del campo electromagnetico y un campo escalar cargado ante el mismo,

$$S = \int d^4x D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Se pide:

   (a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación $U(1)$ global definida según $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, para cualquier constante α.

   (b) Suponiendo, ahora, una transformación local (i.e. permitiendo que α sea, ahora, una función arbitraria de las cuatro coordenadas), deduzca cómo tendría que transformar el campo electromagnético $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$ a efectos de que los primeros dos términos de la Lagrangiana permanezcan invariante ante $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x)$.

   (c) Muestre que la transformación del campo $A_\mu(x)$ deja también invariante al último término y por tanto a la Lagrangiana completa.

   (d) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

   (e) Ahora agregue al Lagrangiano un término $\frac{1}{4!}|\phi|^4$ y vuelva a dibujar los nuevos diagramas de Feynman posibles. Con este nuevo lagrangiano, dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula, $\phi^*\phi \to \phi^*\phi$. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas.

2. Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathscr{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

   (a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación de gauge conjunta $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$, donde la transformación del campo electromagnético es aquella que se dedujo en el problema anterior.

   (b) Verifique que esta acción es invariante ante la transformación global $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A_\mu(x)$, si y sólo si el campo de spin $1/2$ es no-masivo.

   (c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

3. Considere las dos teorías de campos descriptas en los problemas 1 y 2.

   (a) Muestre que un término de masa para el fotón, por más pequeño que sea, rompe la invarianza de gauge $U(1)_{local}$.

   (b) Estudie a qué órden (en potencias de e) aparece el primer término no-nulo en la amplitud de scattering para el proceso que corresponde a crear un par de fotones a partir de una colisión de partícula-antipartícula.

(c) Presente el diagrama (el que corresponde al menor orden no trivial) del proceso de interacción entre cuatro fotones de distinto momento. Vea que es indispensable la consideración de un lazo para tal proceso.

PRÁCTICA 6B: TEORÍAS DE GAUGE (NO ABELIANO)

1. Considere la teoría de Yang-Mills, descripta por la densidad lagrangiana

$$\mathscr{L} = Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$. A_ν son las componentes de un cuadrivector de matrices de $d \times d$ tales que éstas pertenecen a una representación de un dado grupo de Lie. El álgebra de este grupo tiene D generadores y sus constantes de estructura son f^{abc}; i.e., se tiene $A_\nu = A^a_\nu(x)J^a$, con $[J^a, J^b] = if^{abc}J^c$, y con $A^a_\mu(x)$ funciones reales, $a = \{1,2,3,...d\}$. Se pide que:

(a) Muestre que $F_{\mu\nu}$ puede escribirse como el conmutador $\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$, con $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$.

(b) Usando el resultado anterior, muestre que si se transforma el campo de gauge según

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x) - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu\Omega(x)\right)\Omega^{-1}(x),$$

siendo $\Omega(x) = \exp\left(i\omega_a(x)J^a\right)$ un elemento del grupo en cuestión, entonces el lagrangiano de Yang-Mills permanece invariante (ayuda: muestre que ante esta transformación D_μ cambia como $\Omega D_\mu \Omega^{-1}$ y utilice la expresión del item a) para $F_{\mu\nu}$).

(c) Muestre cómo un término de masa para el campo de gauge $A^a_\mu(x)$ rompería dicha invarianza de gauge.

2. Muestre que, a diferencia de la teoría de Maxwell, esta teoría permite la auto-interacción del campo de gauge. Dibuje los diagramas que contribuirían a orden g y g^2 para los scattering de tres y cuatro campos de gauge. Al hacer esto, discuta la dependencia del momento del campo de gauge que aparece en algunos vértices de interacción.

3. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathscr{L}_G = \left(\partial_\mu\Phi\right)^\dagger\left(\partial^\mu\Phi\right) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2$$

donde Φ es un doblete de SU(2) de campos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que $\mathscr{L}_G$ es invariante ante transformaciones de fase globales del grupo $SU(2)$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\Phi(x)$$

b) Muestre que el lagrangiano $\mathscr{L}_L$

$$\mathscr{L}_L = \left(\partial_\mu \Phi + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu\Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu\Phi\right) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}$$

que resulta de la sustitución de ∂_μ por la derivada covariante D_μ en $\mathscr{L}_L$ con

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu$$

donde $\vec{W}_\mu(x)$ es un campo de gauge de tres componentes, y del agregado de un término de gauge puro en función del tensor $\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu$ es invariante ante transformaciones locales de $SU(2)$. Basta para ello que muestre que el ultimo término se ajusta a la forma general del ej 1 y que los primeros términos son invariantes locales.

4. Considere el lagrangiano de QCD

$$\mathscr{L} = \overline{\Psi}(x)(i\partial\!\!\!/ I - M)\Psi(x) - g\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu T_a\Psi(x)G^a_\mu - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a$$

donde $T^a \equiv \frac{\lambda^a}{2}$ y $G^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g\,f_{abc}G^b_\mu G^c_\nu$, siendo f_{abc} las constantes de estructura de $su(3)$ y las λ's las matrices de Guell-Mann.
a) Expanda el término de gluones $-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a$ en el lagrangiano e indentifique los términos del lagrangiano que corresponden a los acoplamientos quark-gluon, y a los de tres y cuatro gluones.
b) Dibuje los cuatro diagramas que, a orden más bajo en la probabilidad, α_s^2, contribuyen al proceso de scattering gluón-gluón, $gg \to gg$.

5. La simetría SU(3) de sabor es un ejemplo de simetría *global* y puede ser incorporada en el lagrangiano de quarks multiplicando al campo de quarks $\psi(x)$ por un espinor de tres componentes χ_i, tal que se identifican los sabores los sabores u,d, y s con los versores de la base canónica en dicho espacio interno:

$$\chi_u \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_d \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_s \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, para un quark de sabor u el lagrangiano se escribe:

$$(\overline{\psi}(x), 0, 0)\,[i\partial\!\!\!/ I - M]\begin{pmatrix} \psi(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \overline{\Psi}(x)[i\partial\!\!\!/ I - M]\Psi(x)$$

donde I es la matriz identidad y M es la matriz de masas, que es proporcional a la identidad en el caso en que la simetría es exacta. Una transformación unitaria arbitraria en el espacio SU(3) se puede escribir como

$$\Psi'(x) = U(\varepsilon^a)\Psi(x) = e^{i\,\varepsilon^a\frac{\lambda_a}{2}}\Psi(x) \quad a = 1,\ldots,8$$

donde ε^a son ocho parámetros reales que caracterizan la transformación, y λ_a son el análogo de las matrices de Pauli pero para SU(3) (ver práctica 2).
a) Muestre que el lagrangiano es invariante ante una transformación global arbitraria de SU(3) en el caso en que M es proporcional a la identidad, es decir, que para cada sabor, los quarks de distinto color tienen igual masa.
b) Qué puede decir respecto del caso en que ε_a son funciones de las coordenadas?