Primer Parcial Estructura 4, primer cuatrimestre 2017: resolución

En lo proximos dias subiremos la resolución de todos los ejercicios. Por ahora solo la del ejercicio 3, sobre un tema que continuaremos viendo..

Ecuación de Dirac

1. Hallar m y a:

   El hecho de que *toda solución de la ec de Dirac es solución de Klein Gordon* implica que los coeficientes k^μ que aparecen en una solución de la forma $e^{ik^\mu x_\mu}\psi_0$ (siendo ψ_0 un spinor con componentes no dependientes del espacio-tiempo) nesariamente verifican: $k^\mu k_\mu = m^2$ siendo m la masa en la ecuación de Dirac. **Esta relación no es un detalle menor. Es clave para la interpretación de las soluciones en términos de particulas de masa m.**

   Usando lo anterior, vemos que los k^μ que aparecen en la exponencial son $k^0 = a$, $k^3 = \frac{3}{5}a$, $k^1 = k^2 = 0$. De modo que $m^2 = \frac{16}{25}a^2$. Es decir, m, que es positivo, es $\frac{4}{5}a$.

   Sabiendo m e insertando el spinor propuesto en la ecuación de Dirac, quedan estas dos ecuaciones para la única incognita α:

$$\begin{aligned} a - m - \frac{3}{5}a\alpha &= 0 \quad (1) \\ (-a-m)\alpha + \frac{3}{5}a &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

   Al tener ya el valor de m, podemos hallar α de cualquiera de las dos ecuaciones (que son compatibles): $\alpha = \frac{1}{3}$

2. Se pide dar el cuadrimomento de la particula o antiparticula que representa esta solución. El cuadrimomento se lee de la fase: $k^0 = a$, $k^3 = \frac{3}{5}a$, $k^1 = k^2 = 0$ (las componentes k_μ son los autovalores de $i\partial_\mu$).

   Dado que $a > 0$ y la exponencial ya tiene un signo menos en la fase, esta solución describe a lo que llamamos solución de partícula. En otras palabras, el autovalor de $\imath\partial_0$ es a (positivo) y por eso a estas soluciones las consideramos soluciones de particulas.

   El operador de spin en una dirección generica dada por el versor $\hat{n}$ es $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}.\hat{n} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}.\hat{n} \end{pmatrix}$. Queremos hallar (si lo hay) la dirección $\hat{n}$ tal que ψ es autovector, con autovalor $+\frac{1}{2}$. En este caso particular, se ve a ojo que la dirección es la del eje z (ni siquiera necesitamos el valor de α para saberlo). Es decir $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\psi = \frac{1}{2}\psi$

3. En este item se pide hallar la matriz $S(\chi) = e^{-\frac{i}{2}\Sigma_{03}\chi}$, con $\Sigma_{03} = [\gamma_0, \gamma_3]$. Esta matriz es la que *realiza un boost sobre un espinor de Dirac y no sobre un cuadrivector.* Basta usar el desarrollo de Taylor de la exponencial, observando lo que se obtiene al hacer potencias pares e impares del exponente.

   De las reglas de anticonmutación, vemos que $\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_3$, $\gamma_0^2 = identidad = -(\gamma_3)^2$. De modo $[\gamma_0, \gamma_3] = 2\gamma_0\gamma_3$. Se ve facilmente, usando las mismas reglas de anticonmutación, que:

$$(\gamma_0\gamma_3)^n = Identidad, \quad n = par \tag{3}$$
$$(\gamma_0\gamma_3)^n = \gamma_0\gamma_3, \quad n = impar \tag{4}$$

   Por ejemplo, $(\gamma_0\gamma_3)^2 = (\gamma_0\gamma_3)(\gamma_0\gamma_3) = -\gamma_0\gamma_0\gamma_3\gamma_3 = -(\gamma_0)^2(\gamma_3)^2 = -1I.(-I) = I.$

   Tomando en cuenta los factores i y $\frac{1}{2}$, se ve que:

$$S(\chi) = e^{-\frac{i}{2}\Sigma_{03}\chi} = (1+\frac{(\chi/2)^2}{2!}+\frac{(\chi/2)^4}{4!}+...)Identidad+(\chi/2+\frac{(\chi/2)^3}{3!}+\frac{(\chi/2)^5}{5!}+...)\gamma_0\gamma_3 \tag{5}$$

   Es decir: $S(\chi) = cosh(\chi/2)Identidad + senh(\chi/2)\gamma_0\gamma_3$.

   Con este resultado, se puede obtener el parámetro χ tal que $S(\chi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   El miembro derecho de la igualdad es el spinor en el sistema en reposo, a menos de la fase dependiente del tiempo. La constante C se introdujo porque el spinor no tiene la normalización standard, aunque no es necesario conocerla para continuar (el cual tiene proyecction de spin $+1/2$. Aún sin saber esto, se puede continuar con el ejercicio).

   Usando la expresión de S obtenemos

$$S(\chi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\chi/2) - 1/3\sinh(\chi/2) \\ 0 \\ \frac{1}{3}\cosh(\chi/2) - \sinh(\chi/2) \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

   Pidiendo que se obtengan los ceros en las dos componentes inferiores, llegamos a: $\tanh(\chi/2) = \frac{1}{3} \rightarrow \chi = 2\ arctanh(\frac{1}{3})$.

Aquí termino la resolución.

Observaciones

- Muchos han encarado el item a) por un lado más engorroso, privandose de los beneficios en usar la relación $k^2 = m^2$. Esto es dificil de entender dado que muchos de los que tomaron este camino largo se han dado cuenta en el item b) de como leer el cuadrimomento a partir de la fase. Al tomar este camino, se enfrentaron al problema de dos ecuaciones con dos incognitas. Si bién no es este un problema algebraico sofisticado, al haber términos cuadraticos involucrando α y m, el despeje se complicaba. *No fue la idea que alguien tomara este camino.* Las ecuaciones que quedan en este caso son:

$$\begin{aligned} a - m - \frac{3}{5}a\alpha &= 0 \qquad (7) \\ (-a - m)\alpha + \frac{3}{5}a &= 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

Una forma de resolver el sistema es multiplicar la primera ecuación por α y restarle la segunda. Se llega a una cuadratica para α, que tiene por soluciones $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha = 3$.

Insertando cada uno de estos valores en alguna de las dos ecuaciones se obtienen dos valores de m: $m = \frac{4}{5}a$ y $m = -\frac{4}{5}a$ respectivamente. Dado que queremos m positivo, la respuesta es $\alpha = \frac{1}{3}$ y $m = \frac{4}{5}a$ (**Nota: en la resolución directa, también m aparece en una cuadratica, teniendo que optar por el valor de m positivo.**

- En el punto c), el parámetro χ tiene relación con el parámetro ordinario $\beta = v/c$ de un boost de Lorentz, *pero no se pedia que se halle este último*. Solo por completitud, si alguien quisiera saber cuál es ese parámetro, es mas sencillo pensar en que boost es necesario hacer para llevavar el cuadrimomento de una particula en reposo $(\frac{4}{5}a, 0, 0, 0)$ a $(a, 0, 0, \frac{3}{5}a)$. De la expresión de un boost sobre un cuadrivector se ve que este paramétro es, en modulo, $|\beta| = |k^3|/k^0 = 3/5$.

  Explicitamente, la matriz Λ seria:

  $$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & 0 & 0 & -\frac{3}{5}\gamma(\beta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5}\gamma(\beta) & 0 & 0 & \gamma(\beta) \end{pmatrix}.$$

  Se puede verificar que haciendo $\Lambda^\mu_\nu k^\mu$ se obtiene el cuadrivector correspondiente al sistema en reposo, es decir, $(m, 0, 0, 0)$.

  Si quisieramos construir la matriz de boost para cuadrivectores como una exponencial de generadores, de forma similar a como se hizo en el item c), tendriamos que exponenciar otro generador: el generador de boost en *z para cuadrivectores*:

  $$\Sigma^{Cuadri}{}_{03} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

  Se puede verificar que $e^{-\frac{i}{2}\Sigma^{Cuadri}{}_{03}\chi} = \Lambda$, usando el paramétro χ del item c) (Verificar).

- Para quienes se equivocaron y escribieron la matriz S como combinación de senos y cosenos de χ: *seria muy raro que una matriz que hace un boost sea periodica.* Si bien es cierto que no tenemos mucha intuición sobre lo que le pasa a un espinor ante un boost, un resultado tan pochoclero, como que luego de un boost determinado el espinor vuelva a tener las mismas componentes, hubiese sido mencionado en clase. Debio llamarle la atención la aparición de senos y cosenos. El resultado correcto de la matriz de un boost, tanto para espinores como cuadrivectores, involucra cosenos o senos hiperbolicos.