ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2017

PRÁCTICA 6: FORMULACIÓN LAGRANGIANA DE MODELOS RELATIVISTAS

La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es la base de la construcción de las *teorías cuanticas de campos* (QFT). De el lagrangiano que describe la teoría clásica pueden leerse ciertas simetrás que se preservarán al cuantizar. Además de la simetría ante trasnformaciones de Poincare, los términos tipicos del Lagrangiano del modelos estandard presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). Si bién el estudio del proceso de cuantización va más alla del alcance de este curso, se comenzará en esta guía a dibujar *diagramas de Feynman* correspondientes a los términos de interacción, los cuales son representaciones graficas de contribuciones a la amplitud de Scattering, de un gran valor heuristico.

1. Halle las ecuaciones de movimiento para el campo $\psi(x)$ que se derivan de la siguiente densidad lagrangiana:
$$\mathscr{L}(\psi,\vec{\nabla}\psi,\ddot{\psi}) = i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\cdot\vec{\nabla}\psi - V(\vec{x},t)\,\psi^*\psi.$$

2. Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,
$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi,$$
   (a) Halle las simetrías del problema, diga que grupo forman. Halle las corrientes de Noether correspondientes a las simetrías internas.

   (b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables parte real e imaginaria de ϕ. Muestre que es equivalente (y mas simple) hallar las ecuaciones de movimiento utilizando las variables ϕ y ϕ^*.

   (c) ¿Como se modifican los puntos 1 y 2 si se agrega al lagrangiano el término $-V(\phi\phi^*)$?

   (d) Considere ahora el Lagrangiano:
$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi,$$
   para un campo ϕ *real*. Repita el analisis anterior de los primeros tres items. Note el factor $\frac{1}{2}$ global diferencia. (Si bién es irrelevante para las ecuaciones de movimiento, se introduce para que el momento canonico conjugado sea $\partial_t\phi$, Será discutido en clase este punto).

3. Considere el Lagrangiano:
$$L = \bar{\psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$
.

   (a) Halle las ecuaciones de movimiento, variando respecto a $\bar{\psi}$

   (b) Compare con la que obtiene variando respecto a ψ.

(c) Halle las simetrías de este lagrangiano y obtenga la corriente de Noether asociada a las simetrŕias internas.

4. Considere los siguientes Lagrangiano describe a dos espinores de Dirac ψ_1 y ψ_2 y un campo escalar real ϕ masivo interactuantes:

$$\begin{aligned} L_1 &= \overline{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \\ &\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi_1}\phi\psi_2 + g\overline{\psi}_2\phi\psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \overline{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \\ &\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi_1}\phi\psi_1 + g\overline{\psi}_2\phi\psi_2 \end{aligned}$$

(a) Halle todas las simetrías de ambos lagrangianos indicando claramente cuantos párametros independientes tiene en cada caso.

(b) Halle las corrientes de Noether conservadas asociadas a las simetrías internas encontradas.

(c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los términos de interacción, indicando con 1 y 2 a los fermiones y con una linea punteada al campo escalar .

(d) A partir de estos, dibuje los diagramas que contribuyen a los procesos
i)$1+\bar{2} \to \bar{1}+2$
ii) $1+\bar{2} \to 1+\bar{2}$
iii) $1+1 \to 2+2$
al orden más bajo en g para cada Lagrangiano. A partir de esto diga cual no es posible en cada modelo. Relacione la imposibilidad del proceso con la ley de conservación del punto b).

5. Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - M\varphi\varphi^* - V(\varphi, \phi)$$

donde $V(\varphi,\phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría.

(a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos (y complejos!) en esta teoría.

(b) Hallar las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga que grupo forman. ¿ Como deben ser las masas M y m y qué forma debe tener V para que el grupo de simetría sea $U(2)$?

6. Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_3)\psi_3(x)$$

(a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este lagrangiano?

(b) Y si fuesen las tres masas iguales ($m_1 = m_2 = m_3$), ¿cuál sería el grupo de simetrías en este caso?

7. Considere la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \lambda A^\mu A_\mu\right);$$

siendo, según la convención standard, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y donde λ representa un parámetro constante de la teoría.

(a) Derivar las ecuaciones de movimiento provenientes de esta acción.

(b) Para el caso $\lambda = 0$, escriba la acción en función de los campos eléctrico y magnético (E y B respectivamente), y relacione estas cantidades con las cantidades T y V (energía cin ética y energía potencial, respectivamente) de la mecánica clásica. A fin de otener una interpretación física de esta analogía, piense cómo se escribe la enegía electromagnética en términos de los campos E y B.

8. Considere el lagrangiano de Dirac acoplado al lagrangiana de Maxwell; es decir

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

siendo D_μ la *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

(a) Escriba este lagrangiano aislando la parte del fermión libre, la del campo electromagnético, y la de interacción.

(b) Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.

(c) Halle todas las simetrías de este Lagrangiano.

(d) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría de campos.