Estructura de la materia 4

Segundo Cuatrimestre de 2017

Práctica 7a: Teorías de Gauge (abeliano)

Gauge symmetry is not a symmetry..A better phrase is Gauge redundancy

Nathan Seiberg

1. Considere la acción del campo electromagnetico y un campo escalar cargado ante el mismo,

$$S = \int d^4x\, D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Se pide:

   (a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación $U(1)$ global definida según $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, para cualquier constante α.

   (b) Suponiendo, ahora, una transformación local (i.e. permitiendo que α sea, ahora, una función arbitraria de las cuatro coordenadas), deduzca cómo tendría que transformar el campo electromagnético $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$ a efectos de que los primeros dos términos de la Lagrangiana permanezcan invariante ante $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x)$.

   (c) Muestre que la transformación del campo $A_\mu(x)$ deja también invariante al último término y por tanto a la Lagrangiana completa.

   (d) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción. Para ello, expanda el primer término diferenciando el término cinético del campo escalar y los términos cubicos y cuarticos de interacción.

   (e) Dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula, $\phi^*\phi \to \phi^*\phi$. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas.

2. Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathscr{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

   (a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación de gauge conjunta $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$, donde la transformación del campo electromagnético es aquella que se dedujo en el problema anterior.

   (b) Verifique que esta acción es invariante ante la transformación global $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A_\mu(x)$, si y sólo si el campo de spin $1/2$ es no-masivo.

   (c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

3. Considere las dos teorías de campos descriptas en los problemas 1 y 2.

   (a) Muestre que un término de masa para el fotón, por más pequeño que sea, rompe la invarianza de gauge $U(1)_{local}$.
   (b) Estudie a qué órden (en potencias de e) aparece el primer término no-nulo en la amplitud de scattering para el proceso que corresponde a crear un par de fotones a partir de una colisión de partícula-antipartícula.
   (c) Presente el diagrama (el que corresponde al menor orden no trivial) del proceso de interacción entre cuatro fotones de distinto momento. Vea que es indispensable la consideración de un lazo para tal proceso.

PRÁCTICA 6B: TEORÍAS DE GAUGE (NO ABELIANO)

1. Considere la teoría de Yang-Mills, descripta por la densidad lagrangiana

$$\mathscr{L} = Tr\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right),$$

   donde $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$. A_ν, para cada μ, es ahora una combinación de matrices de $d\times d$ tales que éstas pertenecen a una representación de un dado grupo de Lie. El álgebra de este grupo tiene D generadores y sus constantes de estructura son f^{abc} (reales); i.e., se tiene $A_\nu = A^a_\nu(x)J^a$, con $[J^a, J^b] = if^{abc}J^c$, y con $A^a_\mu(x)$ funciones reales, $a = \{1,2,3,...d\}$. Se pide que:

   (a) Muestre que $G_{\mu\nu}$ puede escribirse como el conmutador $\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$, con $D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu$.

   (b) Usando el resultado anterior, muestre que si se transforma el campo de gauge según

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x) - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu\Omega(x)\right)\Omega^{-1}(x),$$

   siendo $\Omega(x) = \exp\left(i\omega_a(x)J^a\right)$ un elemento del grupo en cuestión, entonces el lagrangiano de Yang-Mills permanece invariante (ayuda: muestre que ante esta transformación D_μ cambia como $\Omega D_\mu \Omega^{-1}$ y utilice la expresión del item a) para $G_{\mu\nu}$).

   (c) Muestre cómo un término de masa para el campo de gauge $A^a_\mu(x)$ rompería dicha invarianza de gauge.

2. Muestre que, a diferencia de la teoría de Maxwell, esta teoría permite la auto-interacción del campo de gauge. Dibuje los diagramas que contribuirían a orden g y g^2 para los scattering de tres y cuatro campos de gauge.

3. Muestre que la transformación de gauge de los campos, a primer orden en el parámetro $g\omega(x)$ (el factor g se escribe por conveniencia: $\omega \equiv \omega^a J_a$), se reduce a:

$$A'_\mu = A_\mu + ig[\omega, A_\mu] + \partial_\mu\omega$$

Verifique que, como debe ser, los campos A_μ^a mantienen su caracter real ante esta transformación. Note que en el caso abeliano obtiene la transformación usual, incluso considerando la transformación de gauge a todo orden.

4. **Si no hace este ejercicio, al menos observe lo que se afirma aquí** En el caso en que el grupo de gauge es $SU(2)$, las expresiones anteriores pueden reescribirse en términos de componentes de un vector tridimensional. Organizando los tres campos de gauge W_μ^a, muestre que:

   (a) Cada componente de $G_{\mu\nu}$ puede leerse de las componentes del vector:

   $$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$$

   .

   (b) La transformación de gauge de $G_{\mu\nu}$, pensado como un vector tridimensional, se reduce a una rotación.

   (c) El término $-\frac{1}{4}\, Tr G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ se puede reescribir como $-\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}.G^{\mu\nu}$.

5.  Considere el siguiente lagrangiano

   $$\mathscr{L}_G = \left(\partial_\mu \Phi\right)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

   donde Φ es un doblete de SU(2) de campos escalares complejos

   $$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

   a) Muestre que $\mathscr{L}_G$ es invariante ante transformaciones de fase globales del grupo $SU(2)$

   $$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \Phi(x)$$

   b) Usando lo visto en el ejercicio anterior, verifique que el lagrangiano $\mathscr{L}_L$

   $$\mathscr{L}_L = \left(\partial_\mu \Phi - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot \vec{W}_\mu \Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot \vec{W}_\mu \Phi\right) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot \vec{W}^{\mu\nu}$$

   es invariante ante transformaciones locales de $SU(2)$ a primer orden en el parámetro $\alpha(x)$.