Estructura de la materia 4

Segundo Cuatrimestre de 2017

Práctica 5: Ecuaciónes de onda relativistas: Dirac y Klein Gordon

A pesar de que los intentos por construir una mecánica cuántica relativista para un sistema con un numero fijo de partículas, el estudio de estas ecuaciones de onda invariantes de Lorentz (Dirac y Klein Gordon) es fundamental para construir e interpretar el modelo estandard desarrollado en el marco de una teoría cuántica de infinitos grados de libertad.

a) Cuestiones elementales sobre las ecuaciones de Dirac y Klein Gordon y sus limites no relativistas

1. Halle las soluciones de onda plana de la ecuación de Klein-Gordon:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Verifique la relación de dispersión de una partícula de masa m para el numero de onda.

2. Halle el limite en el cual una solución de la ecuación de Klein Gordon verifica la ecuación de Schrödinger para una partícula libre de masa m.

3. A partir de la definición de las densidades y corrientes de probabilidad $\rho(x,t)$ y $\vec{J}(x,t)$ en términos de las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon, demuestre la validez de la ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ en ambos casos. Halle la componente 0 de la corriente en el caso de Klein-Gordon y compare su signo para soluciones de distinto signo en la frecuencia.

4. Dadas las matrices

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta \alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

(Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac.). Escriba explicitamente algunas de esas relaciones para entender lo que significan.

5. Sea la ecuación de Dirac escrita en forma covariante,

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi(x) = 0.$$

   (a) Halle las 4 soluciones en reposo linealmente indepedientes:

$$u^{(1)}(m,\vec{0}),\ u^{(2)}(m,\vec{0}),\ u^{(3)}(m,\vec{0}),\ u^{(4)}(m,\vec{0})$$

   junto a sus respectivas dependencias temporales.

(b) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J}_{Dirac} = 0$$

mostrando que $\rho_{Dirac} = \psi^\dagger \psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$ o en forma compacta: $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$.

(c) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,

$$H\psi = i\partial_t \psi.$$

6. Momento angular total:

(a) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$, pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

(b) Muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm \hbar/2$ en unidades anti-naturales).

(c) Verifique este operador satisface el valor de J^2 esperado para una partícula de espín $1/2$.

7. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

8. A partir de la sustitución $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$ y $E \to \varepsilon_{NR} + m - q\Phi$ en la ecuación de Dirac muestre que, en el límite no relativista y de campos débiles, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi - g\frac{q}{2m}\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{B} \right)\psi = \varepsilon_{NR}\psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón que, si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

b) Grupo de Lorentz y transformación de espinores

9. El espinor de Dirac transforma de una manera caracteristica ante transformaciones del grupo de Lorentz (es decir, rotaciones y boost. Esta esta dada por una matriz S que se obtiene exponenciando los generadores $\Sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$. La transformación del espinor se obtiene mediante $S_\Lambda \equiv e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}$, donde $\omega_{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación de Lorentz.

(a) Halle la expresión explícita de estos para el caso de una rotación en torno a un eje generico.

(b) Idem para el caso de un boost.

10. Para hallar las soluciones de la ecuación de Dirac con momento $\vec{p} \neq 0$ se puede aplicar un boost sobre la soluciones en reposo ($\vec{p} = 0$). Se puede ver que las soluciones de energía positiva/negativa son proporcionales a $(\gamma^\mu k_\mu + m) \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik^\nu x_\nu}$ y $(-\gamma^\mu k_\mu + m) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} e^{ik^\nu x_\nu}$ respectivamente.

    (a) Verifique que ambas son soluciones de la ecuación de Dirac.

    (b) Verique que la parte inferior (superior) de las componentes del espinor tiende a cero para momentos bajos.

11. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \to x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor ψ según $\psi \to \psi' = S_\Lambda \psi$ sienso S la matriz definida previamente. Tomando por valida la igualdad $S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ (ver referencias para esto), muestre que

    (a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

    (b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

    (c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.

    (d) $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$ es un cuadrivector.

c) Helicidad, quiralidad, paridad

12. Muestre que para una solución generica de la ecuación de Dirac ψ, $\tilde{\psi}$ definida como $\tilde{\psi}(t, \vec{x}) = \psi(t, -\vec{x})$ no es solucón. Muestre que $\gamma_0 \tilde{\psi}$ es solución. Esto motiva la defínción de la operación paridad $\mathscr{P}$ definida como $\mathscr{P}\psi = \gamma_0 \psi \circ I$ siendo I la operación de inversión espacial. Verifique que las cantidades definidas en el ejercicio anterior tienen el comportamiento adecuado ante paridad.

13. Muestre que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

14. Partiendo de la definición de los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, muestre que

    (a) que son proyectores: $P_\pm^2 = P_\pm$

    (b) y que corresponden a la quiralidad *Right* y *Left* $\gamma^5 P_\pm \psi = \pm\psi$

15. Muestre que la operación paridad convierte un espinor izquierdo (autovector de γ_5 con autovalor -1) en uno derecho (autovector de γ_5 con autovalor $+1$) y viceversa.

16. Muestre que:

    (a) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar.

    (b) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ es un pseudo-cuadrivector.

17. Definiendo $\psi_R = P_+\psi$ y $\psi_L = P_-\psi$, muestre que:

(a) la ecuación de Dirac en el caso masivo puede escribirse como dos ecuacione acopladas para ψ_R y ψ_L

(b) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R.

(c) Como consecuencia de lo anterior, muestre que para un espinor de masa cero es posible tener soluciones de quiralidad definida.

18. Muestre que el operador de helicidad $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}.\hat{P}$ con $(\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|)$, que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$, de forma tal que se lo puede agregar a estos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

19. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = (\vec{\Sigma}.\,\hat{p})u(\vec{p}).$$

. Por otro lado, verifique que para las antipartículas, quiralidad y helicidad son opuestas

$$\gamma^5 v(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma}.\,\hat{p})v(\vec{p}).$$