

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2018

PRÁCTICA 5: MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA

1. Encuentre las expresiones para las densidades de probabilidad ρ y las corrientes de probabilidad $\vec{J}(x,t)$ en términos de las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon asumiendo la validez de la ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

Ayuda: en cada caso, escriba la diferencia entre dichas ecuaciones y sus conjugadas luego de ser multiplicadas por el conjugado de su solución.

2. Dadas las matrices

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta \alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

Nota: estas matrices γ constituyen la representación de Dirac.

3. Sea la ecuación de Dirac escrita en forma covariante,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

- (a) Halle las cuatro soluciones en reposo linealmente independientes:

$$u^{(1)}(m, \vec{0}), u^{(2)}(m, \vec{0}), u^{(3)}(m, \vec{0}), u^{(4)}(m, \vec{0})$$

junto a sus respectivas dependencias temporales. Piense qué quiere decir energía positiva o negativa.

- (b) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{Dirac} = 0$$

mostrando que $\rho_{Dirac} = \psi^\dagger \psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$.

- (c) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,

$$H\psi = i\partial_t \psi.$$

4. Momento angular total:

- (a) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital \vec{L} , pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con \vec{S} dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

- (b) Muestre que el operador \vec{S} definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm \hbar/2$ en unidades anti-naturales).
- (c) Verifique este operador satisface el valor de J^2 esperado para una partícula de espín $1/2$.
5. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.
6. A partir de la sustitución $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$ y $E \rightarrow \epsilon_{NR} + m - q\Phi$ en la ecuación de Dirac muestre que, en el límite no relativista y de campos débiles, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi - g \frac{q}{2m} \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \psi = \epsilon_{NR} \psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón que, si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

7. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor ψ según $\psi \rightarrow \psi' = S_\Lambda \psi$ donde $S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$. Sabiendo que para una transformación infinitesimal para el operador S se obtiene $S = 1 - \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \epsilon^{\alpha\beta}$ (donde $\epsilon^{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación) muestre que

(a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

(b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

(c) $\bar{\psi} \psi$ es invariante de Lorentz.

(d) $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ es un cuadrivector.

(e) $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ es un pseudoescalar.

(f) $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ es un pseudo-cuadrivector.

8. Muestre que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

9. Muestre que el operador de helicidad $\frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \hat{P}$ con $(\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|)$, que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso \vec{P} , de forma tal que se lo puede agregar a estos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.
10. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p})u(\vec{p}).$$

Por otro lado, verifique que para las antipartículas, quiralidad y helicidad son opuestas

$$\gamma^5 v(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p})v(\vec{p}).$$

11. Partiendo de la definición de los operadores $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, demuestre las siguientes propiedades

que son proyectores	$P_{\pm}^2 = P_{\pm}$
sobre espacios disjuntos	$P_+ P_- = 0$
complementarios	$P_+ + P_- = 1$
y que corresponden a la quiralidad <i>Right</i> y <i>Left</i>	$\gamma^5 P_{\pm} \psi = \pm \psi$

12. Además de la representación de Dirac para las matrices γ , existe la representación de Weyl (o quiral),

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Muestre que estas matrices también cumplen con la condición $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$.
- (b) Muestre que en esta representación la función de onda se puede escribir $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, donde $\psi_L = P_L \psi$ representa la parte de quiralidad *left* y $\psi_R = P_R \psi$ la parte de quiralidad *right* de la función de onda.
- (c) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R