Estructura de la materia 4

Primer cuatrimestre 2018

Guía 6, ej. 5

Consideremos la acción de Proca:

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \lambda A^\mu A_\mu) \tag{1}$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

a) El primer item pide hallar las ecuaciones de movimiento. Para ello, usamos las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\sigma} - \partial_\rho \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\rho A_\sigma\right)} = 0, \tag{2}$$

con $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4}A^\mu A_\mu$.

Observemos que, para no generar confusión en la contracción de índices, usamos índices diferentes en la ecuación de Euler Lagrange a los que aparecen contraídos en el lagrangiano.

Calculemos el primer término de (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\sigma} &= \frac{\lambda}{4}\frac{\partial}{\partial A_\sigma}\left(A^\mu A_\mu\right) \\
&= \frac{\lambda}{4}\frac{\partial}{\partial A_\sigma}\left(A_\alpha\,\eta^{\alpha\mu}A_\mu\right) \\
&= \frac{\lambda}{4}\eta^{\alpha\mu}\left(\delta^\sigma_\alpha A_\mu + A_\alpha\delta^\sigma_\mu\right) \\
&= \frac{\lambda}{4}\left(\delta^\sigma_\alpha A^\alpha + A^\mu\delta^\sigma_\mu\right) \\
&= \frac{\lambda}{4}\left(A^\sigma + A^\sigma\right) = \frac{\lambda}{2}A^\sigma\,.
\end{aligned}$$

En la tercer igualdad sacamos $\eta^{\alpha\mu}$ de la derivada y usamos que $\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\sigma} = \delta^\sigma_\alpha$. En la cuarta igualdad volvimos a usar $\eta^{\alpha\mu}$ para subir índices.

Por otro lado, para el segundo término de (2), primero debemos calcular la siguiente derivada:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial_\rho A_\sigma}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\right] \\
&= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\left[(\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha)\right] \\
&= -\frac{1}{4}(\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{4}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho - \partial^\sigma A^\rho + \partial^\rho A^\sigma + \partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho - \partial^\sigma A^\rho + \partial^\rho A^\sigma\right) \\
&= -\left(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho\right) = -F^{\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación de Euler Lagrange queda:

$$
\frac{\lambda}{2}A^\sigma + \partial_\rho F^{\rho\sigma}\,. \tag{3}
$$

b) Si $\lambda = 0$, la ecuación de movimiento nos dice que

$$
\begin{aligned}
&\partial_\rho F^{\rho\sigma} = 0 \\
&\Rightarrow \partial_\rho\left(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho\right) = 0 \\
&\Rightarrow \partial_\rho\partial^\rho A^\sigma - \underbrace{\partial_\rho\left(\partial^\sigma A^\rho\right)}_{=\partial^\sigma(\partial_\rho A^\rho)} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Si tomamos el gauge de Lorentz, donde $\partial_\rho A^\rho = 0$, entonces

$$
\partial_\rho\partial^\rho A^\sigma = 0\,. \tag{4}
$$

c) La ecuación (4) junto con la ecuación del gauge de Lorentz, constituyen una manera de escribir las ecuaciones de Maxwell en vacío en términos de los potenciales para el campo magnético y eléctrico $\vec{A}$ y ϕ, respectivamente. Escrito en forma extensiva:

$$
\begin{aligned}
&-\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \\
&-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0\,,
\end{aligned} \tag{5}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\
\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\,.
\end{aligned}
$$

Si hubiéramos considerado también los términos del lagrangiano de las fuentes, la primera ecuación de (5) estaría igualada a $4\pi\rho$, y la segunda a $\frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Un comentario: si quisiéramos escribir las ecuaciones directamente en términos de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ empleando $F^{\mu\nu}$, debemos considerar una propiedad adicional de dicho tensor. Las ecuaciones para la divergencia de $\vec{E}$ y el rotor de $\vec{B}$ salen directamente de escribir explícitamente $\partial_\rho F^{\rho\sigma} = 0$ (en vacío). Mientras que las de divergencia de $\vec{B}$ y rotor de $\vec{E}$ se obtienen de pedir

$\partial_{[\mu}F^{\nu\rho]} = 0$, donde los corchetes indican la antisimetrización de índices. Esto es equivalente a definir un tensor dual a F y pedir que su cuadridivergencia sea nula.

d) Podemos asociar el valor de λ a una masa, pues en general, los términos de masa son cuadráticos en los campos y sin derivadas. Con lo cual tiene sentido que las ecuaciones de Maxwell correpondan al caso $\lambda = 0$ ya que ahí el campo A_μ está asociado al fotón, de masa nula.

e) Como vimos en clase, usando

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

y el correspondiente tensor asociado a $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta}\, \eta^{\beta\nu}$, se obtiene:

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x \left(E^2 - B^2\right) \tag{7}$$

para la acción en términos de los campos eléctrico y magnético. Recuerden que contraer ambos índices acá no es hacer un producto de matrices, sino hacer $F_{00}F^{00} + F_{01}F^{01} + ... + F_{33}F^{33}$.